加藤敏夫［著］
丸山　徹　［訳］

行列の摂動

Springer

シュプリンガー・フェアラーク東京

Originally published in English under the title
"A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators"
by Tosio Kato

序

本書は，拙著『線形作用素の摂動論』(*Perturbation Theory for Linear Operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132, Springer, 1980) のはじめの二章に多少の増補を加えたものである．冒頭の二章を切り離して一巻の書物にしてはどうかという示唆は，旧著の刊行以来，というよりはそれ以前からも私の耳にはいっていた．そして漸くこの示唆に従おうと心に決めたのは，より広汎な読者がこの書物を手にとって下さるようになることを願ってのことである．

私は当初からこのふたつの章では，摂動論のうち無限次元空間のもつ位相的な複雑さに煩わされずに取り扱うことのできる部分を体系的に提示したいものと企図していた．もとより散乱にかかわる理論のような，摂動論のいくつかの部分は無限次元に特有なものであることを忘れてはならないが，しかし実際，摂動論の多くの本質的な諸結果，また難度の高い諸結果でさえ，有限次元空間において自明ならざる内容を有するのである．

また私は，この書物が線形代数への導入としても利用されることを，併せて念願している．レゾルベント理論のために本書が採用した，複素函数の体系的な利用に基づく解析的なアプローチは，通常そのような解析的手段に馴染んでいる解析学あるいは応用数学専攻の学徒たちには大いに歓迎されるのではないかと心に期しているのである．

ふたつの章のいたるところで小さな改善や修正を施したが，それに加えて，この新版では次のような新たな節と項とが追加された．すなわち第1章では，積公式に関する§4.7，消散作用素と縮小半群に関する§6.11，正行列に関する

§7 である．第 2 章では，解析的摂動論の取り扱いを拡充した§§4.7-4.9，対称作用素の非対称的摂動に関する§6.6，および（本質的に）非負行列の摂動に関する§7 がそれである．

章，節，項，定理，補題等の番号は旧著におけるそれと同じままになっている．したがって "I-§2.3" という表記は第 1 章第 2 節の第 3 項を意味する．また "補題 I-2.3" は第 1 章の補題 2.3 を表示している．章の番号はそれと同一の章内で言及される場合には省略することとした．しかしこの新版の特殊な成立事情のために，新たに導入された定理，補題等の番号づけに若干の不規則が生じている．たとえば II-§5.7 には 5.13a-5.13c の新しい定理や新しい注意 5.13d が含まれているのはこのような事情によるのである．

参考文献は角括弧内の数字で表記されている．たとえば書物の場合は【 】，論文の場合は［ ］の如くである．文献録には本書の中で引用されるものだけを掲げたが，その番号は旧著と同一のものを踏襲した（ただし本書で新たに加えられた文献は別である）．この方針にしたがってたとえば，T. Kato の項目としては論文 [1,2,3,6,9,12,13] のみが掲げられている．

いまひとつの不都合は，とくに「はじめに」のいく箇所かで，本書には収録されていない旧著第 3 章以降の章への言及が残ってしまっていることである．しかしそうした形式上の不備については，それを取り除くよりも，むしろそのまま残しておく方がより便利ではないかと考えた*.

シュプリンガー社のスタッフ諸氏には，この新しい書物の企画にあたって督励と助力とを賜った．ここに謝意を表する次第である．

1982 年 1 月

バークレーにて

加藤　敏夫

---

* （訳者注）このような箇所については，その都度 †という記号を付して注意した．

日本語版への序文

この本の出来たいきさつは「序」にのべた通りです．主題は線形変換の固有値問題であります．これは通常，線形代数の一部として代数的に取り扱われておりますが，自然科学への応用という点からみますと，はじめから解析的方法を用いて固有値問題を取り扱うのが適当と考えられます．その中心となるのがレゾルベントの概念であります．これは線形変換の固有値を或る解析関数の特異点として捕える考えであります．いうまでもなく，この方法は無限次元の空間で本領を発揮するのですが，この本では有限次元の範囲でこれを徹底的に活用する方針をとりました．例えば，いわゆる正行列の理論においても，レゾルベントが如何に有効であるかを了解して頂けるかと思います．

この本はかなり古い作品ですので著者として不満な点は多々ありますが，幸いに丸山さんの麗筆によって日本語で復活させて頂いたことを無上の喜びと思っております．

1996 年 12 月 3 日

加藤　敏夫

目　　次

はじめに

本書をつうじて,「摂動論」という言葉は「線形作用素の摂動論」を意味する.数学の中には,たとえば解析力学(天体力学)や非線形振動論における摂動論のように,同じ名称で呼ばれる別の分野も存在する.そしてこれらはみな,考察下の問題の完全な解が既知の,単純にして理想的な体系からわずかに乖離した体系を研究するという考え方に基づいている.しかしこのような諸理論が扱う問題と使用する道具とは全く別のものである.以下に展開される線形作用素の摂動論は,他の摂動論とは本質的に独立なものである.

摂動論はレイリーとシュレディンガーによって創始された(Sz.-Nagy [1] を参照).レイリーは振動数とモードを完全に決定することのできる単純な体系からわずかに乖離した振動系の自然振動数とモードを計算する公式を与えた(Rayleigh【1】, §90, 91).この方法は数学的にいえば,問題が完全に解ける単純な作用素とわずかに異なった線形作用素に対する固有値問題の近似解を求めることに等しい.シュレディンガーは,量子力学に現われる固有値問題に対して,これと類似の方法を,一層の一般性と体系化を伴う形で発展させた(Schrödinger【1】, [1]).

しかしながら,これらの開拓的な研究はきわめて形式的で,しかも数学的には不完全なものであった.つまり,固有値および固有ベクトル(または固有函数)は,“摂動”作用素の“非摂動”作用素からの乖離度を測る小さなパラメータの級数に展開できることが,暗黙のうちに仮定されていた.そしてこの級数の収束を証明する試みは何もなされていなかったのである.

収束の問題が最終的に解決されたのは,レリッヒの一連の論文においで

あった（Rellich [1]-[5] を見よ．レリッヒ以前にも収束を証明するいくつかの試みがなされたが，決定的なものではなかった．たとえば Wilson [1] を見よ）．レリッヒの基本的結果は第 II 章および 第 VII 章† において一層詳細に論ずることになるが，さしあたり次のように述べておくことができるであろう*．$T(\kappa)$ はヒルベルト空間 H における有界な自己随伴作用素で，収束巾級数

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)} + \kappa^2 T^{(2)} + \cdots \tag{1}$$

のように，実数パラメータ κ に依存するものとする．非摂動作用素 $T = T(0)$ は有限の重複度 m をもつ（スペクトルの残余から孤立した）孤立的固有値 λ を有するものとする．このとき $T(\kappa)$ は，十分に小さな $|\kappa|$ に対しては，λ の近傍において正確に m 個の固有値 $\mu_j(\kappa)$, $j = 1, \cdots, m$（重複固有値は繰り返して数える）を有し，これらの固有値は収束巾級数

$$\mu_j(\kappa) = \lambda + \kappa\mu_j^{(1)} + \kappa^2\mu_j^{(2)} + \cdots, \quad j = 1, \cdots, m \tag{2}$$

に展開される．それに対応する $T(\kappa)$ の固有ベクトル $\varphi_j(\kappa)$ もまた，正規直交性の条件

$$(\varphi_j(\kappa), \varphi_k(\kappa)) = \delta_{jk} \tag{3}$$

を満たす収束巾級数

$$\varphi_j(\kappa) = \varphi_j + \kappa\varphi_j^{(1)} + \kappa^2\varphi_j^{(2)} + \cdots, \quad j = 1, \cdots, m \tag{4}$$

として選ぶことができる．ここで φ_j は，T の固有値 λ に対する固有ベクトルの正規直交系を形づくる．

これらの結果はまさにレイリー，シュレディンガーおよびその他の学者たちによって予想されたものであるが，その証明は決して容易ではない．H が有限次元で，したがって固有値問題を代数的に扱いうる場合においてさえ，証明は全く自明というわけではないのである．この場合は，$\mu_j(\kappa)$ が κ の代数型函数の分岐となることは明白だが，それが $\kappa = 0$ において分岐点を有する可能性は，ひとり $T(\kappa)$ の自己随伴性を利用することによってのみ排除しう

---

*（訳者注）記号 † については p.vi の訳者注を見よ．

るのである．実際，自己随伴作用素の固有値は実数であるが，κ のある分数巾 $\kappa^{1/p}$ の巾級数で表される函数は，この級数が κ の巾級数に帰着するのでない限り，κ の正・負双方の値に対して実数にはなりえないのである．(3)，(4) を満たす固有ベクトルの存在証明は，はるかに難度の高いもので，より深い分析を要するのである．

実はレリッヒが考えていたのは，作用素 $T(\kappa)$ が非有界の，より一般的な状況であった．このとき級数 (1) は新しい解釈を必要とし，これがこの理論の実質的な部分を形づくっているのである．これ以外にも上記の問題に関連する多くの課題がレリッヒによって研究され，その中にはたとえば，収束半径の評価，誤差評価，すべての固有値・固有ベクトルの斉一的考察や，それに伴って生ずる一様性問題，および非解析的摂動などが数えられる．

レリッヒの基礎的研究は，線形作用素論における類似の，また関連した問題に関する研究にさらに刺激を与えた．ひとつの新しい発展は，フリードリクスによる連続スペクトルの摂動論の創始であった（Friedrichs [2] を見よ）．それは散乱の理論および量子場の理論において，きわめて重要な役割を果たすことが明らかになった．連続スペクトルは離散スペクトルとは全く異なった特性を有する．そのために，ここでは完全に新しい方法が開発されねばならなかった．フリードリクスの理論で扱われた主要問題は，$T(\kappa)$ と T との相似性，すなわち $T(\kappa) = W(\kappa)TW(\kappa)^{-1}$ を満たす非特異作用素 $W(\kappa)$ の存在をめぐるものである．

孤立的固有値の摂動に関するレリッヒの独創的結果にもまた一般化が施された．パラメータ κ が複素数であることを許すことによって，解析的理論は一般性においても，また単純性においても改善されることが発見されたのである．複素パラメータの導入は，解析性が問題となる場合には，自然な考え方であろう．しかしこうする場合には，すべての κ に対して $T(\kappa)$ が自己随伴であるという前提を捨て去らなければならない．なぜなら，κ に解析的に依存する作用素 $T(\kappa)$ は，たとえばすべての実数 κ については自己随伴たりうるけれども，複素領域のすべての κ について自己随伴になることは，一般には不可能だからである．こうして，非自己随伴作用素やバナッハ空間における作用素に対して結果を定式化する研究が促され，そこでは複素函数論が広く援用されているのである（Sz.-Nagy [2], Wolf [1], T. Kato [6]）．自己

随伴作用素に対するレリッヒの基本的な諸結果が，この一般論から容易に導かれることがわかる．

他方，(2) あるいは (4) のような形式的巾級数が発散したり，あるいは意味をもつのは有限個の項だけでさえあるが，しかしそれが $\mu_j(\kappa)$ や $\varphi_j(\kappa)$ なる量を漸近展開の意味で近似する場合が存在することが認識された（Titchmarsh [1], [2], T. Kato [1]）．そしてかつては手におえなかった多くの事例が，この結果として生まれた漸近理論の守備範囲に包摂されることが判明したのである．それは微分方程式の特異摂動論と深い関係を有するものである．

非解析的理論のその他の発展は，一般的なスペクトルの摂動論および作用素のスペクトルのさまざまな特性に対する安定性理論へと道を開き，その頂点を成す結果のひとつが，指数定理である（Gohberg and Krein [1] を見よ）．

その間，作用素の 1-パラメータ半群の摂動論がヒレーとフィリップスによって発展せしめられた（Phillips [1], Hille and Phillips【1】を見よ）．これは，量子力学において馴染みの深い，いわゆる時間に依存する摂動論の一般化であり，また数学的基礎をなすものである．それはまた時間に依存する散乱理論にかかわるものでもあり，さらにそれは翻って，連続スペクトルの摂動に密接な結びつきを有するのである．散乱理論は摂動論のうちでも，今日最も活発に研究されている主題のひとつである．

摂動論が明確な定義をもつ学問領域でないことは，この簡略な展望からも明らかであろう．摂動論は作用素のスペクトル論を広汎に包摂し，その一方，その領域を仕切るなんらかの明確な区分によるというよりはむしろ，その接近法によって統一された一団の知見なのである．この理論を支える基礎は線形函数解析に据えられており，本書のかなりの部分がその説明に費されている†．本書のそれ以外の部分では専ら，上記の諸問題を他のいくつかの主題とともに論ずることとしたい．

第 1 章　有限次元線形空間における作用素論

本章では，有限次元空間における線形作用素の摂動論を論ずる次章への準備を目的とする．ここでは読者が線形代数の初等的な考え方に多少とも馴染んでいることを想定しているが，線形代数の基本的結果を，大半は証明ぬきではじめの諸節に集め，後段の参照に便を図ることとした．線形ノルム空間およびベクトルと作用素を用いた解析に関連する諸概念については，幾分詳細に論じている．(たとえばベクトル・作用素の収束，ベクトル値函数と作用素値函数，等.）また固有値問題については，それが摂動論における主要課題のひとつであることに鑑て，一層取り扱いの完全を期した．固有値問題へのアプローチとしては代数的な方法よりも，むしろレゾルベントの函数論的取り扱いにもとづく解析的方法によることとした．のちの諸章[†]では，この方法を無限次元の場合に拡張するつもりであるが，この意図を勘案すると，ここで採用したアプローチが最も自然と確信するからである．

本章の題材と方法とはきわめて初等的ではあるが，他の機会にまだ公には発表されていないと思われるいくつかの結果も含まれている．(たとえば §4.6 および §6.8 に掲げた射影の組に関する諸結果などがそれに該当する.）

§ 1.　線形空間と線形ノルム空間

1.　基本概念

ここでは有限次元線形空間に関する基本的事実を，概ね証明ぬきで集めておくことにしよう[1]．**線形空間** (vector space) X とは，その元（ベクトル，vector と称する）に対して通常の計算規則に従う**線形演算** (linear operation)

---

[1] たとえば Gelfand【1】, Halmos【2】, Hoffman and Kunze【1】などを参照.

が定義された集合である．ここで線形演算とはふたつのベクトル u, v の加法 $u+v$, およびベクトル u と**スカラー** (scalar) α との乗法 αu を指す．本書をつうじてとくに断らない限り，スカラーは**複素数** (complex number) であることを仮定する.（つまり複素線形空間を想定するのである.）αu は便宜に応じて $u\alpha$ とも書き，また $\alpha^{-1}u$ はしばしば u/α と表記される．**ゼロ・ベクトル** (zero vector) は 0 と書き表わし，スカラーのゼロと記号上は区別せずに表記することとする．

ベクトル $u_1, \cdots, u_n$ の**一次結合** (linear combination) $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ がゼロであるならば必ず $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ とならねばならないとき，$u, \cdots, u_n$ は**一次独立** (linearly independent) であるという．X から取り出すことができる一次独立なベクトルの個数の最大値を X の**次元** (dimension) と称し，それを $\dim \mathsf{X}$ と表記する．そのような個数が有限でなければ，$\dim \mathsf{X} = \infty$ とする．本章では，とくに断らない限り，すべての線形空間は有限次元（つまり $0 \leqq \dim \mathsf{X} < \infty$ ）であることを仮定する．

X の部分集合 M が，X と同一の線形演算の下にそれ自体線形空間となっているとき，M は**線形多様体** (linear manifold) または**線形部分空間** (linear subspace) であるという．M の次元は X の次元を超えることはない．X の任意の部分集合 S に対して，S に属するベクトルで作られたあらゆる一次結合の集合 M は線形多様体であり，それは S によって決定される線形多様体または S の張る (span) 線形多様体，あるいはまた単純に S の**線形包** (linear span) などと呼ばれる．線形空間に関する基本定理により，n 個のベクトルの集合 $u_1, \cdots, u_n$ の線形包 span M は高々 n 次元である．$u_1, \cdots, u_n$ が一次独立である場合，かつその場合に 限って，それは n 次元である．

X における 0 次元の線形多様体はただひとつだけで，それはベクトル 0 一点から成る集合である．0 次元の線形多様体を簡単に 0 と表記することとしよう．

例 1.1.　順序づけられた N 個の複素数の組 $u = (\xi_j) = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$ 全体から成る集合 $\mathsf{X} = \mathsf{C}^N$ は，基本演算 $\alpha u + \beta v$ の通常の定義の下に，N 次元の線形空間となる.（これを複素ユークリッド空間と呼ぶ.）このようなベクトル u を**数ベクトル** (numerical vector) と呼び，そのときどきの便宜に従って**列ベクトル** (column vector)（要素 ξ_j を縦に配列したもの）あるいは**行ベクトル** (row vector)（横の配

列）の形で書く．

例 1.2.　実変数 x の区間 I 上で定義されたすべての複素数値連続函数 $u : x \to u(x)$ の集合は，基本演算 $\alpha u + \beta v$ の普通の定義の下に，無限次元線形空間となる．また条件を限定して，階数 n を固定し，この n 階までの連続な導函数をもつ函数 u の集合を考えても同様である．さらに区間 I を m 次元の実ユークリッド空間 R^m における一般領域[2]としても同じことである．

例 1.3.　連続係数 $a_j(x)$ の斉次線形微分方程式

$$u^{(n)} + a_1(x)\, u^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, u = 0$$

のすべての解の集合は n 次元の線形空間を成す．なぜならこの方程式のすべての解は，一次独立な n 個の**基本解** (fundamental solution) の一次結合として表現できるからである．

2.　基底

X を N 次元線形空間とし，また $x_1, \cdots, x_N$ を N の一次独立なベクトルの族[3]とする．このときその線形包は X に合致し，各 $u \in \mathsf{X}$ は

$$u = \sum_{j=1}^{N} \xi_j\, x_j \tag{1.1}$$

の形式に一意的に**展開** (expand) される．この意味で族 $\{x_j\}$ を X の**基底** (basis)[4]と呼び，スカラー ξ_j をこの基底についての u の**係数** (coefficient)（または**座標**，coordinate）と称する．$u \to (\xi_j)$ という対応関係は線形演算を保存する一対一の作用素であり，この意味で, X から C^N（数ベクトルの集合，例 1.1 を見よ）の上への**同型作用素** (isomorphism) である．ここで線形演算を保存するというのは，$u \to (\xi_j), v \to (\eta_j)$ ならば　$\alpha u + \beta v \to (\alpha\xi_j + \beta\eta_j)$ の成り立つことを指している．

よく知られているとおり，$x_1, \cdots, x_p$ を任意の一次独立なベクトルの族とす

[2] R^m の**一般領域**(region)とは，R^m の開集合，あるいは開集合とその境界の全部または一部を併せた合併を意味する．

[3] ここでは**族**(family)という用語を，その元がパラメータに依存する集合を表わすのに用いる．

[4] これは**順序基底** (ordered basis) である．(Hoffman and Kunze【1】, p. 47 参照.)

るとき，これに適当なベクトル $x_{p+1},\cdots,x_N$ をつけ加えて，基底 $x_1,\cdots,x_p,$ $x_{p+1},\cdots,x_N$ をつくることができる．

例 1.4. C^N においては，j 番目の位置に 1 を置いたベクトル $x_j=(\cdots,0,1,0,\cdots)$ $(j=1,\cdots,N)$ は基底（**標準基底**，canonical basis）を成す．標準基底についての $u=(\xi_j)$ の係数は ξ_j 自身である．

X の任意のふたつの基底 $\{x_j\}$, $\{x'_j\}$ は

$$x_k=\sum_j \gamma_{jk}\,x'_j\,,\quad k=1,\ldots,N \tag{1.2}$$

というひと組の線形の関係で結びつけられている．すると同一のベクトル u の，基底 $\{x_j\}$ および $\{x'_j\}$ についての係数 ξ_j, ξ'_j は，次の式によって相互に関連づけられることとなる．

$$\xi'_j=\sum_k \gamma_{jk}\,\xi_k\,,\quad j=1,\ldots,N. \tag{1.3}$$

(1.2) および (1.3) の逆変換は

$$x'_j=\sum_k \widehat{\gamma}_{kj}\,x_k\,,\quad \xi_k=\sum_j \widehat{\gamma}_{kj}\,\xi'_j \tag{1.4}$$

であり，ここで $(\widehat{\gamma}_{jk})$ は行列 (γ_{jk}) の逆行列である．すなわち

$$\sum_i \widehat{\gamma}_{ji}\,\gamma_{ik}=\sum_i \gamma_{ji}\,\widehat{\gamma}_{ik}=\delta_{jk}=\begin{cases}1\ (j=k)\\ 0\ (j\neq k),\end{cases} \tag{1.5}$$

$$\det(\gamma_{jk})\ \det(\widehat{\gamma}_{jk})=1\,. \tag{1.6}$$

ここで $\det(\gamma_{jk})$ は行列 (γ_{jk}) の行列式を表わしている．

連立一次方程式 (1.3), (1.4) は，行列を用いて表現しておくと便利であろう．つまり行列 (γ_{jk}) を (C), その逆行列を $(C)^{-1}$, ξ_j, ξ'_j を要素とする列ベクトルをそれぞれ (u), $(u)'$ とすれば

$$(u)'=(C)\,(u),\quad (u)=(C)^{-1}\,(u)' \tag{1.7}$$

となる．ここで (u) や (u') が，特定の基底の選択に応じてそれが表現して

いる“抽象的”なベクトル u とは概念上異なるものであることに注意しなければならない．

3. 線形多様体

X の任意の部分集合 S, S′ に対して，S と S′ の（**線形**）**和** ((linear) sum)，つまり $u+u'$ ($u \in \mathsf{S}$, $u' \in \mathsf{S}'$) なる形のすべてのベクトルの集合を $\mathsf{S}+\mathsf{S}'$ という記号で表わす[5]．S が単一のベクトル u から成る場合は，$\mathsf{S}+\mathsf{S}'$ を簡単に $u+\mathsf{S}'$ と書く．M が線形多様体の場合は，$u+\mathsf{M}$ は u を通って M に平行な**非同次線形多様体** (inhomogeneous linear manifold) と呼ばれる．M をひとつ固定して得られる非同次線形多様体 $u+\mathsf{M}$ の全体は，次の線形演算の下に線形空間となる．

$$\alpha(u+\mathsf{M})+\beta(v+\mathsf{M})=(\alpha u+\beta v)+\mathsf{M}\,. \tag{1.8}$$

この線形空間のことを，X の M を法とする**商空間** (quotient space) と称し，X / M と表記する．X / M の元は M の**余因子** (coset) と呼ぶ．X / M のゼロ・ベクトルは集合 M であり，また $u+\mathsf{M}=v+\mathsf{M}$ となるためには $u-v\in\mathsf{M}$ であることが必要十分である．X / M の次元を（X についての）M の**余次元** (codimension) または**不足数** (deficiency) といい，codim M という記号で表わす．すると

$$\dim\mathsf{M}+\operatorname{codim}\mathsf{M}=\dim\mathsf{X} \tag{1.9}$$

である．

$\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ が線形多様体であるならば，$\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2$ および $\mathsf{M}_1\cap\mathsf{M}_2$ もまた線形多様体であり，

$$\dim(\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2)+\dim(\mathsf{M}_1\cap\mathsf{M}_2)=\dim\mathsf{M}_1+\dim\mathsf{M}_2 \tag{1.10}$$

が成り立つ．線形多様体（あるいは X の任意の部分集合）についての演算 $\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2$ は結合法則を満たす．つまり $(\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2)+\mathsf{M}_3=\mathsf{M}_1+(\mathsf{M}_2+\mathsf{M}_3)$

---

[5] X+X′ を X と X′ との**合併** (union) と混同してはならない．合併は $\mathsf{X}\cup\mathsf{X}'$ と表記し，また S と S′ との**共通部分** (intersection) は $\mathsf{S}\cap\mathsf{S}'$ と書き表わす．

であり，これを簡単に $\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2+\mathsf{M}_3$ と書くことにしよう．また s 個の線形多様体 M_j に対して $\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2+\cdots+\mathsf{M}_s$ も同様に定義することができる．

$\mathsf{X}=\mathsf{M}_1+\mathsf{M}_2+\cdots+\mathsf{M}_s$ で，しかも $\sum u_j=0$ $(u_j\in\mathsf{M}_j)$ ならばすべての u_j が 0 であるとき，X は線形多様体 $\mathsf{M}_1,\cdots,\mathsf{M}_s$ の**直和** (direct sum) であるという．そしてこれを

$$\mathsf{X}=\mathsf{M}_1\oplus\cdots\oplus\mathsf{M}_s \tag{1.11}$$

と書くのである．この場合には，各 $u\in\mathsf{X}$ は

$$u=\sum_j u_j\,,\quad u_j\in\mathsf{M}_j\,,\quad j=1,\ldots,s \tag{1.12}$$

の形式に一意的に表現することができる．そしてまた

$$\dim\mathsf{X}=\sum_j\dim\mathsf{M}_j \tag{1.13}$$

が成り立つ．

問題 1.5. $\mathsf{X}=\mathsf{M}_1\oplus\mathsf{M}_2$ ならば，$\dim\mathsf{M}_2=\operatorname{codim}\mathsf{M}_1$ である．

4. 収束とノルム

$\{x_j\}$ を有限次元線形空間 X の基底とする．$\{u_n\}, n=1,2,\cdots$ は X におけるベクトルの列とし，u_n の基底 $\{x_j\}$ についての係数を ξ_{nj} とする．いま

$$\lim_{n\to\infty}\xi_{nj}=0\,,\quad j=1,\ldots,N \tag{1.14}$$

が成り立つとき，$\{u_n\}$ は 0 に**収束する** (converge) あるいは**極限** (limit) 0 を有するといい，これを $u_n\to 0$, あるいは $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ と書き表わす．ある u に対して $u_n-u\to 0$ であるとき，$\{u_n\}$ は u に**収束する**（あるいは極限 u を有する）といって，記号的には $u_n\to u$, あるいは $\lim_{n\to\infty}u_n=u$ と表記する．極限は，それがもし存在するならば，一意的である．

この収束の定義は，用いられる基底 $\{x_j\}$ の選び方にはよらない．実際，新しい基底 $\{x'_j\}$ についての u_n の係数を ξ'_{nj} とするとき，座標の変換公式 (1.3) によれば，(1.14) からは $\lim_{n\to\infty}\xi'_{nj}=0$ が導かれるので，この事実

が確認される．

X における線形演算は，この収束の概念について次のような意味で**連続** (continuous) である．すなわち $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $u_n \to u$, $v_n \to v$ とするとき，$\alpha_n u_n + \beta_n v_n \to \alpha u + \beta v$ が成り立つのである．

さて，ベクトルの収束を**ノルム** (norm) を用いて表現しておくことが，いろいろな目的のために便利である．たとえば，X の基底 $\{x_j\}$ をひとつ固定し，

(1.15)
$$\|u\| = \max_j |\xi_j|$$

とおく．ここで ξ_j は u の $\{x_j\}$ についての係数である．すると (1.14) によると，$u_n \to u$ が $\|u_n - u\| \to 0$ と同値であることがわかる．この $\|u\|$ を u のノルムと称する．

ただし，(1.15) がノルムの唯一の可能な定義というわけではない．ノルムとしてこれ以外に，

(1.16)
$$\|u\| = \sum_j |\xi_j|$$

あるいは

(1.17)
$$\|u\| = \left(\sum_j |\xi_j|^2\right)^{1/2}$$

を選ぶこともできる．いずれの場合にも，次の条件が満たされる．

(1.18)

$\|u\| \geqq 0$; $\|u\| = 0$ となるのは $u = 0$ の場合かつその場合に限る．

$\|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$　（同次性）．

$\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|$　（三角不等式）．

実は，すべての $u \in$ X に対して定義され，しかもこれらの条件を満たすどんな函数 $\|u\|$ も**ノルム**と呼ぶのである．(1.18) の最後の不等式からは

(1.19)
$$|\,\|u\| - \|v\|\,| \leqq \|u - v\|$$

が導かれることに注意しよう．これは u を $u-v$ で置き換えればすぐにわかる．

$\|u\|=1$ を満たすベクトル u は**正規化されている** (normalized) という．いかなる $u\neq 0$ に対しても，ベクトル $u_0=\|u\|^{-1}u$ は正規化されたベクトルとなる．この u_0 は u を**正規化** (normalization) して得られるという．

ノルム $\|\ \|$ が与えられたとき，収束 $u_n\to u$ は $\|u_n-u\|\to 0$ なる関係によって自然な方法で定義される．収束のこの定義は用いられるノルムから確かに独立なので，上記の収束と合致する．これは，同一の空間 X 上で定義されるいかなるふたつのノルム $\|\ \|, \|\ \|'$ も，

$$\alpha'\|u\| \leqq \|u\|' \leqq \beta'\|u\|, \quad u\in \mathsf{X} \tag{1.20}$$

が成り立つという意味で**同等** (equivalent) であることから導かれる．ここで α', β' は u から独立な正の定数である．

付随的に次の点にも注意しておこう．**任意**のノルム $\|\ \|$ および**任意**の基底 $\{x_j\}$ について，ベクトル u の係数 ξ_j は次の不等式を満たす．

$$|\xi_j| \leqq \gamma\|u\|, \quad j=1,\ldots,N, \tag{1.21}$$

$$\|u\| \leqq \gamma' \max_j |\xi_j|. \tag{1.22}$$

ここで γ, γ' はノルム $\|\ \|$ と基底 $\{x_j\}$ だけに依存する正の定数である．これらの不等式は，ノルム $\|\ \|'$ を特別のノルム (1.15) と同一視することによって，(1.20) から導かれる．

ノルム $\|u\|$ は u の**連続**函数である．これは $u_n\to u$ ならば $\|u_n\|\to\|u\|$ となることを意味し，(1.19) からただちに導かれる．また同じ不等式から，$u_n\to u$ ならば $\{u_n\}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) であること，すなわち**コーシーの条件** (Cauchy condition)

$$\|u_n-u_m\|\to 0, \quad m,n\to\infty \tag{1.23}$$

が満たされることもわかる．逆に，$\lim u_n$ が存在するためには，Cauchy 条件が十分であることも容易に知られるであろう．

ノルムの導入は，ベクトルの収束概念を定義するために不可欠というわけではないが，きわめて便利な手段である．応用のためには，目的に最もふさ

わしいノルムを選ぶことが大切である．ノルムが定義されている線形空間を**(線形) ノルム空間** (normed (vector) space) と称する．いかなる有限次元線形空間もノルム空間にすることができる．そして同一の線形空間であっても，異ったノルムを選択すれば，異ったノルム空間となるのである．以下の行論では，所与の線形空間を，それに適当なノルムを導入して得られるノルム空間と見なしていくことがしばしばおこる．ここで考える有限次元ノルム空間の概念は，後の 諸章† で導入される**バナッハ空間** (Banach space) という概念の（特殊な場合であり，また）ひとつのモデルとなっている．

5.　ノルム空間の位相的概念

本節では，ノルム空間と結びついた位相的概念について簡単にふりかえっておくことにしたい[6]．ここでは主として有限次元空間を考えているので，実ユークリッド空間の場合と比べて本質的な相違点は全くない．無限次元空間において必要とされる修正点については，後に説明することにしよう†．

ノルム空間 X は，任意の二点間の隔りが定義された**距離空間** (metric space) の特殊事例である．X における二点（ベクトル）u, v の隔りは $\|u-v\|$ を以て定義される．$\|u-u_0\| < r$ を満たす点 $u \in \mathsf{X}$ の集合を X の（開）**球** (ball)と呼ぶ．ここで u_0 はこの球の**中心** (center) であり，$r>0$ はその**半径** (radius)である．$\|u-u_0\| \leqq r$ を満たす u の集合を**閉球** (closed ball) と称する．$u_0 = 0, r = 1$ の場合は，これを**単位球** (unit ball) と呼ぶ．点 $u \in \mathsf{X}$ が与えられたとき，この u を中心とする球を含む X の任意の部分集合を u の**近傍** (neighborhood) と呼ぶ．X の部分集合がある球に含まれるならば，それは**有界** (bounded) であるという．X 自身は $\dim \mathsf{X} = 0$ でないならば有界ではない．

S を X の任意の部分集合とする．S が点 u の近傍になっている場合，u は S の**内点** (interior point) であるという．また u が S の（X についての）補集合 S′ の内点であるとき，u は S の**外点** (exterior point) であるとい

[6] ここで必要なのは，距離空間の位相に関する初歩的な概念のみである．手頃な教科書として，たとえば Royden【1】をあげておこう．

う．u が S の内点でもなく，また外点でもないとき，u は S の境界点であるという．S のすべての境界点の集合 ∂S を S の**境界** (boundary) と称する．S とその境界との合併 $\overline{S}$ を S の**閉包** (closure) と呼ぶ．S が内点だけから成る集合である場合，それは**開集合** (open set) であるという．そして S′ が開集合であるとき，あるいは同じことであるが，$S = \overline{S}$ のとき，S は**閉集合** (closed set) であるという．任意の部分集合 S の閉包は閉集合である．すなわち $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$．X のすべての線形多様体は閉である（ただし X が有限次元の場合）．

これらの概念は収束点列を用いても定義することができる．たとえば，$\overline{S}$ は $u_n \to u$ を満たす点列 $u_n \in S$ が存在するようなすべての $u \in X$ の集合である．また S が閉集合であるためには，$u_n \in S$ かつ $u_n \to u$ であるとき $u \in S$ の成り立つことが必要十分である．

点 u の部分集合 S からの隔りを dist (u, S) と標記する．すなわち

$$\text{dist } (u, S) = \inf_{v \in S} \|u - v\| . \tag{1.24}$$

S が閉集合でしかも $u \notin S$ ならば，dist $(u, S) > 0$ である．

有限次元ノルム空間 X のひとつの重要な性質は，ボルツァーノ–ワイエルストラスの定理と呼ばれる次の命題が成り立つことである．つまり，X のベクトルから成るいかなる有界点列 $\{u_n\}$ についても，ある $v \in X$ に収束する部分列 $\{v_n\}$ を抽出することができる．この性質は X が**局所コンパクト** (locally compact)[7] であるという用語で表現される．さらに部分集合 $S \subset X$ の元から成る任意の点列が，S のある元に収束する部分列を有するとき，S は**コンパクト** (compact) であるという．

6. ベクトルの無限級数

ベクトル $u_n \in X$ の無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.25}$$

[7] (1.20) の証明は，本質的に X の局所コンパクト性に依拠している．

の収束は，数の級数の場合と同様に定義される．(1.25) が v に収束する（あるいは和 v を有する）というのは，部分和 $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ からなる点列 $\{v_n\}$ が（v に）収束することを意味する．和 v は通常，級数自体と同じ (1.25) の表現形式で表記される．

(1.25) が収束するための十分条件は

$$\sum_n \|u_n\| < \infty \tag{1.26}$$

が成り立つことである．(1.20) によると，あるノルムについて (1.26) が成り立つならば，いかなるノルムについてもやはりこれが成り立つ．そして (1.26) が成り立つ場合，(1.25) は**絶対収束する** (converge absolutely) というのである．また

$$\|\sum_n u_n\| \leqq \sum_n \|u_n\| \tag{1.27}$$

である．

問題 1.6. u_n および v の，基底 $\{x_j\}$ に関する係数をそれぞれ ξ_{nj}, η_j とする．(1.25) が収束するためには，$\sum_n \xi_{nj} = \eta_j$, $j = 1, \cdots, N$ であることが必要十分である．また (1.25) が絶対収束するためには，N 個の級数 $\sum_n \xi_{nj}$, $j = 1, \cdots, N$ が絶対収束することが必要十分である．

絶対収束するベクトルの級数は，項を並べる順序をどのように変えても，その和は不変である．この点は、ある基底についての係数を考えれば明らかであろう（問題 1.6 を見よ）．しかし後の参考のために，係数を使わない，より直接的な証明の大略を摘記しておく．$\sum u'_n$ を，(1.25) から項の順序を入れ替えて得られるひとつの級数とする．まず $\sum \|u'_n\| = \sum \|u_n\| < \infty$ であることは明らかであろう．したがって任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\sum_{n=m+1}^{\infty} \|u_n\| < \varepsilon$ となるような整数 m が存在する．そこで p を十分に大きく選び，$u_1, \cdots, u_m$ が $u'_1, \cdots, u'_p$ に含まれるようにする．すると任意の $n > m$ および $q > p$ に対して，$\| \sum_{j=1}^{q} u'_j - \sum_{k=1}^{n} u_k \| \leqq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|u_k\| < \varepsilon$．極限に移って，$q > p$ に対しては $\| \sum_{j=1}^{q} u'_j - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \| \leqq \varepsilon$ を得る．これで $\sum u'_n = \sum u_n$ が示されたわけである．

この事実は，級数に関する実にさまざまな結果が，ベクトルの級数についてもそのまま妥当することを示す一例である．同様の方法で，たとえば，絶対収束するベクトルの二重級数は，行や列の順序を勝手に変更しても，あるいはこれを単一級数に変換しても，その和が変わらないことを示すことができる．

7.　ベクトル値函数

ベクトルの列 $\{u_n\}$ は，整数の集合 $\{n\}$ から X の中への函数とみなすことができるが，そのかわりに，実または複素変数 t について定義され，X の中に値をとる函数 $u_t = u(t)$ を考えてみよう．$\lim_{t\to a} u(t) = v$ という関係は，任意のノルムを用いて，$t \to a$（通常 $t \neq a$ なるものと理解する）のとき $\|u(t) - v\| \to 0$ が成り立つことと定義する．$\lim_{t\to a} u(t) = u(a)$ のとき，$u(t)$ は $t = a$ において**連続** (continuous) であるという．また $u(t)$ が一般領域 E のすべての点において連続であるとき，それは E において連続であるということにしよう．

次の極限が存在するとき，これを $u(t)$ の導函数と称する．

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} h^{-1}\big(u(t+h) - u(t)\big). \tag{1.28}$$

数値函数の場合と全く同様に，次の公式が成り立つ．ただしここで，$\phi(t)$ は複素数値函数である．

$$\frac{d}{dt}\big(u(t) + v(t)\big) = u'(t) + v'(t)\,, \tag{1.29}$$

$$\frac{d}{dt}\,\phi(t)\,u(t) = \phi(t)\,u'(t) + \phi'(t)\,u(t).$$

ベクトル値函数 $u(t)$ の積分も，数値函数の場合と同様に定義することができる．たとえば，$u(t)$ を実変数 t, $a \leqq t \leqq b$ の連続函数としよう．このときリーマン積分 $\int_a^b u(t)dt$ は，区間 $[a,b]$ の分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ について構成された和 $\sum(t_j - t_{j-1})u(t_j)$ の，適当な極限として定義されるのである．同様に $u(t)$ を複素変数 t の連続函数とし，C を長さをもつ曲線とするとき，積分 $\int_{\mathrm{C}} u(t)dt$ を定義することもできる．このような積分の存在

証明は，数値函数の場合と全く同様にすればよく，大部分は複素数の絶対値をベクトルのノルムで置き換えれば十分である．これらの積分について，次の公式が成り立つ．

$$\int \big(\alpha u(t) + \beta v(t)\big)\, dt = \alpha \int u(t)\, dt + \beta \int v(t)\, dt, \tag{1.30}$$

$$\left\| \int u(t)dt \right\| \leqq \int \|u(t)\| \; |dt|.$$

これらの定義を広義の積分に拡大することには，なんの困難もない．以下，本書では，ベクトル値函数の微分・積分に関する公式を，これ以上説明を加えることなく，自由に使ってゆくことにしたい．

変数 t が実数であっても複素数であっても，ベクトル値函数 $u(t)$ の導函数の形式的定義にはなにも相違がない．だがこれらふたつの場合には，数値函数の場合と同様，ひとつの本質的な差がある．$u(t)$ が複素平面の領域 D のすべての点で定義され，しかも微分可能であるとき，$u(t)$ は D において**正則（解析的）** (regular, analytic, holomorphic) であるという．複素函数論の結果の大半は，このようなベクトル値の正則函数にも妥当する[8]．かくしてコーシーの積分定理，テイラー展開およびローラン展開，リューヴィルの定理等々が得られるのである．たとえば $t=0$ が正則函数 $u(t)$ の孤立特異点である場合，

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n a_n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} t^{-n-1}\, u(t)\, dt \tag{1.31}$$

が成り立つ．ここで C は $t=0$ を内側に含む正の向きをつけた閉曲線，たとえば円である．$n<0$ について $a_n=0$ のとき，$t=0$ は正則点（除去可能な特異点）である．また $n<-k$ については $a_n=0$ であり，一方 $a_{-k}\neq 0$

---

[8] 本書をつうじて，我々は複素函数論を大いに利用してゆくが，それは Knopp【1,2】のような標準的教科書に論じられている初等的な結果に限られている．実際には，これらの諸結果をベクトル値あるいは作用素値の函数に適用するが，このような一般化を施すには，通常，なにも難しいところはない．そこで我々はとくに説明を加えることなく，これらの事実を使うことにしたい．用いられる定理については，必要な場合はつねに Knoppを参照する．

の場合は，$t=0$ は位数 $k>0$ の**極** (pole) である．さらにそれ以外の場合は，$t=0$ は**真性特異点** (essential singularity) である[9]．

問題 1.7.　$t=0$ が位数 k の極ならば，$t\to 0$ のとき $\|u(t)\|=O(|t|^{-k})$.

問題 1.8.　X のある基底に関する $u(t)$ の係数を $\xi_j(t)$ とする．$u(t)$ が連続（微分可能）であるためには，すべての $\xi_j(t)$ が連続（微分可能）であることが必要十分である．この基底に関する $u'(t)$ の係数は $\xi_j'(t)$ である．同様に，$\int u(t)dt$ の係数は $\int \xi_j(t)dt$ である．

§ 2.　線形形式と双対空間

1.　線形形式

X を線形空間とする．$u\in$ X に対して定義される複素数値函数 $f[u]$ が次の条件を満たすとき，f は**線形形式** (linear form) あるいは**線形汎函数** (linear functional) であるという．すなわち，すべての $u,v\in$ X とすべてのスカラー α,β について

(2.1)
$$f[\alpha u+\beta v]=\alpha f[u]+\beta f[v]$$

が成り立つという条件がこれである．

例 2.1.　X $=$ C^N（N 次元数ベクトルの空間）であるならば，X 上の線形形式は，$u=(\xi_j)$ に対して

(2.2)
$$f[u]=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\,\xi_j$$

の形式で表現することができる．u が成分 ξ_j の**列ベクトル**として表わされている場合には，f を成分 α_j の**行ベクトル**として表現するのが普通である．(2.2) はこれらふたつのベクトルを行列とみなしての積である．

例 2.2.　X を例 1.2 で考えた連続函数 $u=u(x)$ と空間とする．このとき次のような函数は X 上の線形形式の事例である．

(2.3)　　$f[u]=u(x_0)$,　ここで x_0 は固定されたベクトル．

---

[9] Knopp【1】, p.117 を見よ．

(2.4)　$$f[u] = \int_a^b \phi(x)\, u(x)\, dx, \quad \text{ここで } \phi(x) \text{ は固定された函数.}$$

$\{x_j\}$ を X の基底とする ($\dim \mathsf{X} = N < \infty$). $u = \sum \xi_j x_j$ が u の展開であるとき，(2.1) によると

(2.5)　$$f[u] = \sum \alpha_j \, \xi_j$$

が得られる．ここで $\alpha_j = f[x_j]$ である．したがって線形形式はそれぞれ，この基底について定まる数ベクトル (α_j) によって表現され，また逆に，各数ベクトル (α_j) は，(2.5) によってひとつの線形形式を定める．C^N 上の線形形式について，(2.5) は (2.2) と正確に対応している．

同一の線形形式 f は，異なった基底 $\{x'_j\}$ を用いる場合には，異った数ベクトルによって表現される．新しい基底と古い基底との関係が，変換 (1.2) または (1.4) によって与えられるならば，ふたつの表現の間には次のような関係が成り立つ．

(2.6)　$$\alpha'_j = f[x'_j] = \sum_k \widehat{\gamma}_{kj} \, f[x_k] = \sum_k \widehat{\gamma}_{kj} \, \alpha_k \,,$$

$$\alpha_k = \sum_j \gamma_{jk} \, \alpha'_j \,.$$

これを行列を用いて書き直せば，

(2.7)　$$(f)' = (f)\,(C)^{-1}, \quad (f) = (f)'\,(C)$$

である．ここで (C) を行列 (γ_{jk}) ［(1.7) を見よ］であり，(f) および $(f)'$ はそれぞれ，(α_j), (α'_j) を成分とする行ベクトルである．

2.　随伴空間

X 上で定義される複素数値函数 $f[u]$ が

(2.8)　$$f[\alpha u + \beta v] = \overline{\alpha}\, f[u] + \overline{\beta}\, f[v]$$

なる関係を満たすとき，f は**半線形** (semilinear) であるという（あるいは共

役線形, conjugate-linear, **反線形**, anti-linearであるともいう）．ここで $\overline{\alpha}$ は α の共役の複素数を表わしている．いうまでもなく，$f[u]$ が半線形形式であるためには，$\overline{f[u]}$ が線形形式であることが必要十分である．ある種の形式上の便宜のために，今後は線形形式ではなく，むしろ半線形形式を扱っていくことにしたい．

例 2.3.　(2.2) 式の右辺における ξ_j を $\overline{\xi_j}$ で置き換えれば，C^N 上の半線形形式が得られる．ただし，ここで $u = (\xi_j)$ である．

例 2.4.　X は例 2.2 と同様とする．このとき

$$f[u] = \overline{u(x_0)}\,, \tag{2.9}$$

$$f[u] = \int_a^b \phi(x)\,\overline{u(x)}\,dx \tag{2.10}$$

は X 上の半線形形式の例となっている．

f, g をふたつの半線形形式とするとき，次の式によって定義されるその一次結合は明らかに半線形形式である．

$$(\alpha f + \beta g)\,[u] = \alpha f[u] + \beta g[u]\,. \tag{2.11}$$

このように，X 上で定義されるすべての半線形形式の集合は線形空間を成し，これを X の**随伴空間** (adjoint space)（あるいは**共役空間**，conjugate space）と呼んで，X* と書き表わす．X* のゼロ・ベクトルは，X のすべてのベクトル u を複素数ゼロに写すゼロ形式で，この函数もやはり 0 で表記する．

X* の取り扱いに際しては，X と同じレベルで考えるのが便利である．こうするために

$$f[u] = (f, u) \tag{2.12}$$

と書き表わして，この (f, u) のことを $f \in$ X* と $u \in$ X との**スカラー積** (scalar product) と呼ぶ．(f, u) の定義により，(f, u) は f について線形，かつ u について半線形であることが知られる．すなわち

$$(\alpha f + \beta g, u) = \alpha(f, u) + \beta(g, u)\,, \tag{2.13}$$

$$(f, \alpha u + \beta v) = \overline{\alpha}(f, u) + \overline{\beta}(f, v)\,.$$

例 2.5. $\mathsf{X} = \mathsf{C}^N$ とすると，X がすべての列ベクトル $u = (\xi_j)$ の集合であるのに対して，X^* はすべての行ベクトル $f = (\alpha_j)$ の集合とみなすことができる．それらのスカラー積は

$$(f, u) = \sum \alpha_j \, \bar{\xi}_j \tag{2.14}$$

によって与えられる．

注意 2.6. 線形空間に関する代数学的理論においては，X 上のすべての線形形式の集合を線形空間 X の**双対空間** (dual space) と定義する．随伴空間の定義として本書のような方法を選んだのは，ユニタリ空間 X (§6 を見よ) の随伴空間が X 自身と同一視できるようにするためである[1].

3. 随伴基底

$\{x_j\}$ を X の基底とする．線形形式の場合と同様に，数ベクトル (α_k) のおのおのに対して，$(f, x_k) = \alpha_k$ を満たす $f \in \mathsf{X}^*$ が存在する．とくに各 j に対して

$$(e_j, x_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, N \tag{2.15}$$

を満たす一意的な $e_j \in \mathsf{X}^*$ が存在する．このようにして定まる e_j が一次独立であることは容易にわかる．

$$f = \sum_j \alpha_j \, e_j \quad ここで \quad \alpha_j = (f, x_j) \tag{2.16}$$

により，各 $f \in \mathsf{X}^*$ は e_j の一次結合として，一意的に表わすことができる．実際，$f \in \mathsf{X}^*$ を (2.16) の形に表現するふたとおりの方法があるとすれば，それらの差は，すべての x_k とのスカラー積がゼロとなり，したがってまた，すべての $u \in \mathsf{X}$ とのスカラー積もゼロとなる．したがってそれはゼロ形式に等しくなければならないのである．

---

[1] たとえば Halmos【2】を見よ．X^* を X 上のすべての線形形式の集合として定義し，ただしその際 $(\alpha f)[u] = \overline{\alpha} f[u]$ と定義することがときどきある．こうすると，$f[u]$ は u については線形，f については半線形となる（たとえば Lorch【1】を見よ）．本書における X^* の定義は，この点については Riesz and Sz.-Nagy【1】と同様である．

このように N 個のベクトル e_j は X^* の基底を形づくることとなるわけで，これを X の基底 $\{x_j\}$ に**随伴する** (adjoint) 基底と称する．基底 $\{e_j\}$ は N 個の元から成り立っているので，

$$\dim \mathsf{X}^* = \dim \mathsf{X} = N \tag{2.17}$$

である．

各 $u \in \mathsf{X}$ に対して

$$u = \sum_j \xi_j \, x_j \quad ここで \quad \xi_j = \overline{(e_j, u)} \tag{2.18}$$

が成り立つ．また (2.16) と (2.18) とから，

$$(f, u) = \sum \alpha_j \, \overline{\xi}_j = \sum (f, x_j)(e_j, u) \tag{2.19}$$

が導かれる．

$\{x_j\}$ と $\{x_j'\}$ を X のふたつの基底とし，それら相互の関係は (1.2) によって与えられているものとする．するとこれらに対応する X^* の随伴基底 $\{e_j\}$, $\{e_j'\}$ は，公式

$$e_j' = \sum_k \widehat{\gamma}_{jk} \, e_k, \quad e_k = \sum_j \overline{\widehat{\gamma}}_{kj} \, e_j' \tag{2.20}$$

によって，互いに関係づけられる．さらに

$$\overline{\gamma}_{jk} = (e_j', x_k), \quad \overline{\widehat{\gamma}}_{kj} = (e_k, x_j') \tag{2.21}$$

が成り立つ．

4.　ノルム空間の随伴空間

X^* は X とともに N-次元の線形空間であるから，X^* におけるベクトル列の収束概念が §1.4 と同様に定義される．同じ理由により X^* にノルムを導入することができる．通常，X^* のノルムは独立に定義されるのではなく，X のノルムと相互的関係を有する．

X がノルム $\|u\|$ の下でのノルム空間であるとき，X* は次のように定義されるノルム $\|f\|$ の下でのノルム空間と定める[2].

$$\|f\| = \sup_{0\neq u\in \mathsf{X}} \frac{|(f,u)|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} |(f,u)|\,. \tag{2.22}$$

（X は局所コンパクトであるから）u の連続函数 $|(f,u)|$ は単位球 $\|u\|=1$ 上において最大値を有するという事実により，$\|f\|$ が有限であることが導かれる．このように定義されるノルム $\|f\|$ がノルムの条件（1.18）を満たすことは容易に確かめられる．ふたつのノルムに対して同じ記号 $\|\ \|$ を用いても，混乱の生ずる恐れはあるまい．

例 2.7.　基底 $\{x_j\}$ を固定し，X におけるノルムが (1.15) によって与えられているものとしよう．$\{e_j\}$ を X* における随伴基底とするとき，(2.19) により，$|(f,u)| \leqq (\sum|\alpha_j|)\|u\|$ を得る．しかしここで等号が成立するのは，$|\xi_1| = |\xi_2| = \cdots = |\xi_N|$ で，しかもすべての $\alpha_j\,\overline{\xi_j}$ が非負の実数の場合である．これから

$$\|f\| = \sum |\alpha_j| \tag{2.23}$$

が示される．同様にして，X におけるノルムが (1.16) によって与えられるとき，X* におけるノルムは

$$\|f\| = \max |\alpha_j| \tag{2.24}$$

で与えられる．こうしてノルム (1.15) および (1.16) は互いに随伴的であるということができる．

(2.22) から

$$|(f,u)| \leqq \|f\|\,\|u\|, \quad f\in \mathsf{X}^*, \quad u\in \mathsf{X} \tag{2.25}$$

であることがわかる．これを一般化された意味での**シュヴァルツの不等式** (Schwarz inequality) と呼ぶ．導き方から知られるように，この不等式は単に $\|f\|$ の定義によるもので，それが本質的な意味をもつのは，$\|f\|$ になにか独立的な特徴づけが与えられている場合に限るのである．(たとえば，ユニタリ空間の場合．§6 参照.)

---

[2] ここで $\dim \mathsf{X} > 0$ を仮定している．$\dim \mathsf{X} = 0$ の場合は自明である．

(2.25) により，$\|u\| \geqq |(f,u)|/\|f\|$ であるが，実は次のような，より強い関係が成り立つのである[3].

$$\|u\| = \sup_{0\neq f\in X^*} \frac{|(f,u)|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} |(f,u)|. \tag{2.26}$$

これは任意の $u_0 \in X$ に対して

$$(f,u_0) = \|u_0\|, \quad \|f\| = 1 \tag{2.27}$$

を満たす $f \in X^*$ が存在するという事実から導かれる．(2.27) の証明にはノルムの性質に関するより深い知識が必要で，これは次節において述べることにしよう．

問題 2.8. すべての $u \in X$ に対して $(f,u) = 0$ ならば $f = 0$ である．またすべての $f \in X^*$ に対して $(f,u) = 0$ ならば，$u = 0$ である．

シュヴァルツの不等式から導かれる単純な帰結は，**スカラー積 (f,u) が f と u との連続函数である** という事実である．実際[4]，これは

$$\begin{aligned}|(f',u') - (f,u)| &= |(f'-f,u) + (f,u'-u) \\ &\qquad +(f'-f,u'-u)| \\ &\leqq \|f'-f\|\,\|u\| + \|f\|\,\|u'-u\| \\ &\qquad +\|f'-f\|\,\|u'-u\|\end{aligned} \tag{2.28}$$

の関係から知られる．

とくに，$u_n \to u$ ならば，すべての $f \in X^*$ に対して $(f,u_n) \to (f,u)$ が成り立つ．また $f_n \to f$ ならば，すべての $u \in X$ に対して $(f_n,u) \to (f,u)$ である．同様にして，級数 $\sum u_n = u$ が収束すれば，すべての $f \in X^*$ に対して $\sum (f,u_n) = (f,u)$ の収束が導かれる．(すなわちスカラー積について，項別の乗法が許されるのである.) また逆に，すべての $f \in X^*$ に対して $(f,u_n) \to (f,u)$ が成り立つならば，$u_n \to u$ である．これを示すには固定

[3] ここでもまた $\dim X^* > 0$ を仮定している．

[4] (f,u) の連続性は (2.19) からただちに導かれる．しかし (2.28) での証明は，無限次元空間の場合にも妥当するという利点を有する．

された X の基底を用いて u_n および u を展開してみればよい.

問題 2.8a. $u_1, \ldots, u_r$ が一次独立ならば，それをわずかに変化させてもやはり一次独立である.［ヒント：$u_1, \ldots, u_r$ を拡張して X の基底 $\{u_j\}$ をつくる. $\{e_k\}$ を X の随伴基底とする. このとき $\det((u_j, e_k)) = 1$. u_j および e_k は固定し，$u_1, \ldots, u_r$ をわずかに変化させると，この行列式は依然としてゼロではない.］

5. 球の凸性

S を X の開球とする. このとき S は**凸** (convex) 集合である. つまり S の任意の二点（ベクトル） u, v に対して，u と v を結んだ線分は S に含まれる. 換言すれば,

(2.29) $u, v \in \mathsf{S}$ かつ $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ならば $\lambda u + (1-\lambda) v \in \mathsf{S}$.

実際，S の中心を u_0, 半径を r で表わすと，$\|\lambda u + (1-\lambda)v - u_0\| = \|\lambda(u - u_0) + (1-\lambda)(v - u_0)\| < \lambda r + (1-\lambda) r = r$ であり，これで S の凸性が示されたのである. 以下では， S は単位球 ($u_0 = 0$, $r = 1$) であることを想定する.

X は N-次元の複素ユークリッド空間 C^N と同型であるから，X は $2N$-次元の実ユークリッド空間 R^{2N} と**実線形空間** (real vector space) として（つまり，スカラーとして実数だけを考える場合）同型である. こうして S は R^{2N} における凸集合とみなすことができる. R^n の凸集合に関する周知の定理[5]により，S の境界上に位置する各ベクトル u_0 （すなわち $\|u_0\| = 1$）に対して， u_0 を通る S の**支持超平面** (support hyperplane) が存在する. これから

(2.30) $$g[u_0] = 1\,, \text{ かつ } u \in \mathsf{S} \text{ に対して } g[u] < 1$$

を満たす，X 上の**実線形** (real-linear) 形式 $g[u]$ の存在が知られるのである. ここで g が実線形形式であるというのは， $g[u]$ が実数値で，しかもすべての実数 α, β と $u, v \in \mathsf{X}$ に対して $g[\alpha u + \beta v] = \alpha g[u] + \beta g[v]$ の成り立つ

[5] たとえば Eggleston【1】を見よ.

ことを意味する．

g は複素線形空間 X 上では線形形式でもないし，また半線形形式でもない．しかし[6]

$$(f, u) = f\,[u] = g\,[u] + ig\,[iu] \tag{2.31}$$

によって g と関係づけられる $f \in X^*$ が存在する．$f[u+v] = f[u] + f[v]$ の成り立つことは自明なので，この f が X 上の半線形形式であることを示すためには，実数 α, β に対して $f[(\alpha+i\beta)u] = (\alpha-i\beta)f[u]$ であることを確かめれば十分である．これは次のようにすればよい．

$$\begin{aligned} f\,[(\alpha+i\beta)\,u] &= g\,[\alpha u + i\beta u] + ig\,[i\alpha u - \beta u] \\ &= \alpha g\,[u] + \beta g\,[iu] + i\alpha g\,[iu] - i\beta g\,[u] \\ &= (\alpha - i\beta)\,(g\,[u] + ig\,[iu]) = (\alpha - i\beta)\,f\,[u]\,. \end{aligned}$$

さて，この f は次のような性質を有する．

$$(f, u_0) = 1, \quad \|f\| = 1. \tag{2.32}$$

これを見るために，$(f, u) = Re^{i\theta}$ とする．ここで θ は実数で，しかも $R \geqq 0$ である．すぐ上で示した f の半線形性により，$(f, e^{i\theta}u) = e^{-i\theta}(f, u) = R$ であり，したがって $\|e^{i\theta}u\| = \|u\| < 1$ ならば，$|(f, u)| = R = \mathrm{Re}\,(f, e^{i\theta}u) = g[e^{i\theta}u] < 1$ である．これから $\|f\| \leqq 1$ が知られる．とくに $|(f, u_0)| \leqq 1$．しかし $\mathrm{Re}\,(f, u_0) = g[u_0] = 1$ であるから，$(f, u_0) = 1$ とならねばならない．これから $\|f\| = 1$ も得られる．

ノルムの同次性により，(2.32) は (2.27) と同値であることに注意しよう．

6. 第二随伴空間

X^* の随伴空間 X^{**} は，X^* 上の半線形形式の総体である．$u \in X$ をひとつ固定し，$F[f] = \overline{(f, u)}$ とすれば，F はそのような半線形形式の一例となっている．このように $u \in X$ のおのおのに対して X^{**} のひとつの元 F が対応

[6] i は虚数単位．

する．u, v がそれぞれ F, G に対応するとき，$\alpha u + \beta v$ は $\alpha F + \beta G$ に対応するから，この意味で，X と X^{**} との間に成り立つこの対応関係は**線形**である．$\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X$ であるという事実から，X^{**} の全空間がこの方法で尽くされること，言い換えると，各 $F \in X^{**}$ に対して，それに対応する $u \in X$ が存在することがわかる．さらに X, したがって X^*, X^{**} がノルム空間であるならば，X^{**} のノルムは X のノルムと一致する．すなわち (2.26) から知られるように $\|F\| = \|u\|$ である．こうして X^{**} は線形空間としてばかりでなく，ノルム空間としても X と**同一視**することができるのである．この意味において $F[f]$ を $u[f] = (u, f)$, したがって

$$(u, f) = \overline{(f, u)} \tag{2.33}$$

と書くことが許されるであろう．

これらの結果は $\dim X$ が有限であるという仮定に本質的に依拠しており，この点は注意を要する．

問題 2.9. $\{x_j\}$ を X の基底，これに随伴する X^* の基底を $\{e_j\}$ とする．このとき $\{x_j\}$ は $\{e_j\}$ に随伴する $X^{**} = X$ の基底である．

$(f, u) = 0$ であるときに，$f \perp u$ あるいは $u \perp f$ と書くことにしよう．X の部分集合 S のすべての元 u に対して $f \perp u$ であるときには，$f \perp S$ と書く．同様に $u \in X$ と $S' \subset X^*$ に対しても $u \perp S'$ という記号を使うことにしよう．$f \perp S$ を満たすすべての $f \in X^*$ の集合を S の**零化集合** (annihilator) と呼び，これを $S^{\perp}$

と書き表わす．同様に，X^* の部分集合 S' の零化集合 $S'^{\perp}$ は，$u \perp S'$ を満たすすべての $u \in X$ の集合を意味する．

任意の $S \subset X$ に対して $S^{\perp}$ は線形多様体であり，$S^{\perp}$ **の零化集合** $S^{\perp\perp}$ **は S の線形包 M と合致する**．とくに X の任意の線形多様体 M に対して，$M^{\perp\perp} = M$ が成り立つ．

問題 2.10. $\operatorname{codim} M = \dim M^{\perp}$.

§3.　線形作用素

1.　定義と行列表現

X, Y をふたつの線形空間とする．X の各ベクトル u を Y のベクトル $v = Tu$ に写す函数 T が線形の関係を保存するとき，すなわち X のすべての u_1, u_2 とすべてのスカラー α_1, α_2 に対して

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T u_1 + \alpha_2 T u_2 \tag{3.1}$$

を満たすとき，T は X から Y への**線形変換** (linear transformation) あるいは**線形作用素，一次演算子** (linear operator) であるという．X を T の**定義域** (domain space)，Y を**値域** (range space) と呼ぶ．Y = X の場合は，簡単に T は X **における**線形作用素であるという．本書ではとくに断らない限り，作用素は線形作用素を意味する．

X の任意の部分集合 S に対して，$Tu, u \in \mathsf{S}$ なる形のすべてのベクトルの集合を，T による S の**像** (image) と称し，これを $T\mathsf{S}$ と表記する．それは Y の部分集合である．M が X の線形多様体であるならば，$T\mathsf{M}$ は Y の線形多様体となる．とくに Y の線形多様体 $T\mathsf{X}$ を T **の像** (image) と呼んで R(T) という記号で表わす．R(T) の次元を T の**階数** (rank) と称し，それを rank T と表記する．Y に関する R(T) の不足数（余次元）を T の**不足数** (deficiency) と呼んで def T と表わす．こうすると

$$\text{rank}\ T + \text{def}\ T = \dim \mathsf{Y} \tag{3.2}$$

である．

Y の任意の部分集合 S′ に対して，$Tu \in \mathsf{S}'$ となるようなすべてのベクトル $u \in \mathsf{X}$ の集合を，S′ の**逆像** (inverse image) と呼んで $T^{-1}\mathsf{S}'$ と表記する．$0 \in \mathsf{Y}$ の逆像は X の線形多様体で，それを T の**核** (kernel) あるいは**零空間** (null space) と呼び N(T) で表わす．N(T) の次元を T の**退化次数** (nullity) と称し，それを nul T と表わす．すると

$$\text{rank}\ T + \text{nul}\ T = \dim \mathsf{X} \tag{3.3}$$

が成り立つ．これを示すには，T が商空間 X/N(T)（その次元は $\dim \mathsf{X} - \text{nul}\ T$）

を $\mathsf{R}(T)$ の上に 1 対 1 に写すことに注意すれば十分であろう．

nul T と def T がともにゼロならば，T は X を Y の上に 1 対 1 に写す．この場合には**逆作用素** (inverse operator) T^{-1} が定義される．T^{-1} は Y 上で定義され，値を X にとる作用素で，Tu を u に写す．$(T^{-1})^{-1} = T$ の成り立つことは明らかであろう．T^{-1} が存在するとき，T は**非特異** (nonsingular) であるといい，T^{-1} が存在しないときは**特異** (singular) であるという．T が非特異であるためには $\dim \mathsf{X} = \dim \mathsf{Y}$ であることが必要である．また $\dim \mathsf{X} = \dim \mathsf{Y}$ ならば，nul $T = 0$ と def $T = 0$ とは同値であり，したがってそのいずれか一方から T の非特異性が導かれる．

$\{x_k\}$ を X の基底とする．各 $u \in \mathsf{X}$ は (1.1) の形の展開形を有するから，

$$Tu = \sum_{k=1}^{N} \xi_k \, T x_k \,, \quad N = \dim \mathsf{X}. \tag{3.4}$$

このように X から Y への作用素 T は $Tx_k, k = 1, \cdots, N$ の値を定めることによって決定される．さらにこれらの値は Y の中で任意に指定することができ，そのとき T を線形とするためには，それを (3.4) によって定義すれば十分である．

$\{y_j\}$ を Y の基底とすれば，各 Tx_k は

$$Tx_k = \sum_{j=1}^{M} \tau_{jk} \, y_j \,, \quad M = \dim \mathsf{Y} \tag{3.5}$$

という形に展開できる．(3.5) を (3.4) に代入すると，基底 $\{y_j\}$ に関する $v = Tu$ の係数 η_j は

$$\eta_j = \sum_{k} \tau_{jk} \, \xi_k \,, \quad j = 1, \ldots, M \tag{3.6}$$

によって与えられる．このように，X, Y それぞれの基底 $\{x_k\}, \{y_j\}$ を定めたとき，X から Y への作用素 T は $M \times N$ 型の行列 (τ_{jk}) で表現されるのである．逆に $M \times N$ 型の行列 (τ_{jk}) のそれぞれに対して，この行列が所与の基底に関しての表現となる，X から Y への作用素が存在する．

新しい一対の基底 $\{x'_k\}, \{y'_j\}$ を与えたとき，同一の作用素 T を表現する

行列を (τ'_{jk}) とする．ふたつの行列 (τ'_{jk}) と (τ_{jk}) との関係は，(3.5) および Tx'_k を $\{y'_j\}$ を用いて表わした同様の式を，座標変換の公式 (1.2)，(1.4) および Y においてそれに対応する公式と結び合わせれば得られる．結果は

$$\tau'_{jk} = \sum_{i,h} \gamma'_{ji}\, \tau_{ih}\, \widehat{\gamma}_{hk} \tag{3.7}$$

である．このように行列 (τ'_{jk}) は (γ'_{jk}), (τ_{jk}) および $(\widehat{\gamma}_{jk})$ という三つの行列の積となっている．[(γ'_{jk}) は (γ_k) を (γ'_j) に変換する行列である．]

T が X からそれ自身への作用素ならば, $y_j = x_j$ および $y'_j = x'_j$ とおいてみるのが有益である．すると

$$(\tau'_{jk}) = (\gamma_{jk})\,(\tau_{jk})\,(\widehat{\gamma}_{jk}). \tag{3.8}$$

(1.6) から

$$\det(\tau'_{jk}) = \det(\tau_{jk}). \tag{3.9}$$

このように $\det(\tau_{jk})$ は作用素 T 自身によって定まり，基底の選択にはよらないのである．それを T の**行列式** (determinant) と呼び，$\det T$ と表記する．同様にして，行列 (τ_{jk}) のトレース $\sum \tau_{jj}$ も基底の選び方によらずに定まる．これを T の**トレース** (trace) と呼んで，$\operatorname{tr} T$ と書き表わすことにしよう．

問題 3.1.　$\{f_j\}$ を $\{y_j\}$ に随伴する Y^* の基底とする．このとき

$$\tau_{jk} = (T\,x_k,\, f_j). \tag{3.10}$$

問題 3.2.　$\{x_j\}$, $\{e_j\}$ をそれぞれ互いに随伴的な X , X* の基底とする．T を X から X 自身への作用素とするとき，

$$\operatorname{tr} T = \sum_j (T\,x_j,\, e_j). \tag{3.11}$$

2.　作用素の線形演算

T, S を X から Y へのふたつの線形作用素とするとき，それらの一次結合 $\alpha S + \beta T$ を，すべての $u \in$ X に対して

$$(3.12)\qquad (\alpha S+\beta T)\,u=\alpha\,(S\,u)+\beta\,(T\,u)$$

を対応させる作用素として定義する．これはやはり X から Y への線形作用素である．X から Y へのすべての線形作用素の集合を $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ と表記すると，$\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ は上記の線形演算の下に線形空間となる．この線形空間の零元は，すべての $u\in\mathsf{X}$ に対して $0u=0$ と定義されるゼロ作用素 0 である．

問題 3.3.　rank $(S+T)\leqq$ rank $S+$ rank T.

$N=\dim\mathsf{X}$, $M=\dim\mathsf{Y}$ とするとき，ベクトル空間 $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ の次元は $N\,M$ に等しい．これを示すために，X および Y の基底をそれぞれ $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ とし，X から Y への作用素 P_{jk} を

$$(3.13)\qquad P_{jk}\,x_h=\delta_{kh}\,y_j\,,\quad k,h=1,\ldots,N\,;\quad j=1,\ldots,M$$

とする．これら $M\,N$ 個の作用素 P_{jk} は $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ の一次独立な元で，しかも (3.5) により

$$(3.14)\qquad T=\sum\tau_{jk}\,P_{jk}$$

が成り立つ．こうして $\{P_{jk}\}$ が $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ の基底であることがわかり，上の主張が示されたのである．$\{P_{jk}\}$ を X, Y それぞれの基底 $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ に対応する $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ の基底と呼ぶ．(3.14) によれば，行列の要素 τ_{jk} は，基底 $\{P_{jk}\}$ に関する“ベクトル” T の係数であり，また (3.7) あるいは (3.8) は，$\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ における座標変換の公式となっている．

ふたつの線形作用素 T, S が与えられたとき，それらの積 $T\,S$ は，すべての $u\in\mathsf{X}$ に対して

$$(3.15)\qquad (T\,S)\,u=T\,(S\,u)$$

を対応させる作用素として定義される．ここで X は S の定義域であり，T の定義域は S の値域 Y と同一であるものとする．線形作用素に関するこれらの演算については，次のような諸関係が成り立つ．

$$(3.16)\qquad (T\,S)\,R=T\,(S\,R),\ \text{これを}\ T\,S\,R\ \text{と表記する．}$$

$$(\alpha T)\,S=T\,(\alpha\,S)=\alpha\,(T\,S),\ \text{これを}\ \alpha T\,S\ \text{と表記する．}$$

$$(T_1 + T_2)\,S = T_1\,S + T_2\,S\,.$$

$$T\,(S_1 + S_2) = T\,S_1 + T\,S_2\,.$$

問題 3.4. rank $(T\,S) \leqq \max(\mathrm{rank}\ T, \mathrm{rank}\ S)$.

問題 3.5. ある固定された基底について，S と T との行列表現を (σ_{jk}), (τ_{jk}) とするとき，$S+T$ および ST の行列表現はそれぞれ $(\sigma_{jk})+(\tau_{jk})$, $(\tau_{jk})(\sigma_{jk})$ である（これらの演算が有意味な場合についてだけ考える）．また T^{-1} が存在する場合，その行列表現は (τ_{jk}) の逆行列である．

3. 線形作用素の代数

S, T が X 上で定義され，それ自身の中に値をとる作用素とするとき，それらの積 $T\,S$ が定義され，それは再び X から X への作用素となる．こうして X から X へのすべての線形作用素の集合 $\mathcal{B}(\mathsf{X}) = \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{X})$ は，線形空間であるばかりでなく，ひとつの**代数** (algebra) を構成しているのである．しかし $\dim \mathsf{X} \geqq 2$ の場合は，一般には $T\,S = S\,T$ が成り立たないので，$\mathcal{B}(\mathsf{X})$ は**可換** (commutative) ではない．とくに $T\,S = S\,T$ が成り立つ場合，T と S とは（互いに）**可換である** (commute) という．すべての $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して，$T0 = 0T = 0$ であり，また $T1 = 1T = T$ が成り立つ．ここで 1 は**恒等作用素** (identity operator)（つまりすべての $u \in \mathsf{X}$ について $1u = u$ を以て定義される作用素）である．したがって 1 は $\mathcal{B}(\mathsf{X})$[1]の**単位元** (unit element) となっているのである．$\alpha 1$ の形の作用素は**スカラー作用素** (scalar operator)[2]と呼ばれ，記号的にはスカラー α と区別せずに書くこととしよう．スカラー作用素は $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ のすべての作用素と可換である．

$TT = T^2$, $TTT = T^3$ 等々と書き，$T^0 = 1$ と定義すれば，

$$T^m T^n = T^{m+n}, \quad (T^m)^n = T^{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

が成り立つ．z を変数とする任意の多項式 $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n$ に

---

[1] $1 \neq 0$ であるためには $\dim \mathsf{X} \geqq 1$ であることが（必要でしかも）十分である．

[2] これをダンフォードのスペクトル作用素論に現われるスカラー作用素の概念と混同してはならない．(Dunford and Schwartz【1】を見よ.)

対して，作用素

$$p(T)=\alpha_0+\alpha_1 T+\cdots+\alpha_n T^n \tag{3.18}$$

を定義する．写像 $p(z)\to p(T)$ は多項式のつくる代数から $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ への準同型 (homomorphism) である．すなわち $p(z)+q(z)=r(z)$ あるいは $p(z)q(z)=r(z)$ からそれぞれ $p(T)+q(T)=r(T)$ あるいは $p(T)q(T)=r(T)$ が導かれる．そしてとくに $p(T)$ と $q(T)$ は可換であることが知られる．

問題 3.6. $\mathsf{Y}=\mathsf{X}$, $y_j=x_j$ とするとき (3.13) によって与えられる $P_{jk}\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ は

$$P_{jk}P_{ih}=\delta_{ki}P_{jh}\,,\quad j,\,k,\,i,\,h=1,\ldots,N \tag{3.19}$$

を満たす．

問題 3.7. $\mathsf{R}_n=\mathsf{R}(T^n)$, $\mathsf{N}_n=\mathsf{N}(T^n)$, $n=0,1,2,\cdots$ とおく．列 $\{\mathsf{R}_n\}$ は非増加であり，また列 $\{\mathsf{N}_n\}$ は非減少である．さらに $n<m$ に対しては $\mathsf{R}_n\neq\mathsf{R}_{n+1}$, また $n\geqq m$ に対しては $\mathsf{R}_n=\mathsf{R}_{n+1}$ を成り立たしめる非負の整数 $m\leqq\dim\mathsf{X}$ が存在する．

$T\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ が非特異ならば，逆作用素 T^{-1} が存在して，これも $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ に属する．しかも

$$T^{-1}T=TT^{-1}=1 \tag{3.20}$$

が成り立つ．T が**左逆作用素** (left inverse) T' （すなわち $T'T=1$ を満たす $T'\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$）を有するならば，$T$ の退化次数はゼロである．なぜなら $Tu=0$ からは $u=T'Tu=0$ が導かれるからである．T が**右逆作用素** (right inverse) T''（すなわち $TT''=1$）を有するならば，T の不足数はゼロである．実際，すべての $u\in\mathsf{X}$ に対して $u=TT''u$ であるから，u は $\mathsf{R}(T)$ に含まれる．$\dim\mathsf{X}$ が有限の場合は，左右の逆作用素のいずれかの存在から，T は非特異であり，しかも $T'=T^{-1}$ あるいは $T''=T^{-1}$ の成り立つことがそれぞれ導かれる．

S と T が非特異ならば，TS もまた非特異で，

$$(TS)^{-1}=S^{-1}T^{-1}. \tag{3.21}$$

非特異な T に対しては，その負の指数をもつ巾乗 T^{-n}, $n=1,2,\cdots$ を定義することができ，$T^{-n}=(T^{-1})^n$ が成り立つ．この場合，(3.17) が任意の整

数 m, n について成り立つ.

行列式とトレースに関する次の関係が，問題 3.5 からただちに導かれる.

$$\det TS = (\det T)(\det S), \tag{3.22}$$

$$\operatorname{tr}(\alpha S + \beta T) = \alpha \operatorname{tr} S + \beta \operatorname{tr} T,$$

$$\operatorname{tr} ST = \operatorname{tr} TS.$$

問題 3.8. (3.22) の最後の式は，$S \in \mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$, $T \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}, \mathsf{X})$ したがって $ST \in B(\mathsf{Y})$, $TS \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ の場合でも成り立つ.

問題 3.8a. $T, S \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して $\det(\alpha - TS) = \det(\alpha - ST)$. [ヒント：$(\alpha - TS)T = T(\alpha - ST)$ に (3.22) を適用せよ.]

4. 射影と巾零作用素

M, N を X の**相補的な** (complementary) 線形多様体とする. つまりこれは

$$\mathsf{X} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{N} \tag{3.23}$$

を意味する. §1.3 を見よ. こうすると各 $u \in \mathsf{X}$ は $u = u' + u''$, $u' \in \mathsf{M}$, $u'' \in \mathsf{N}$ の形式に一意的に表現することができる. このとき u' を N に沿った $\boldsymbol{u}$ **の M 上への射影** (projection of u on M along N) と呼ぶ. 同様の意味において $v = v' + v''$ ならば，N に沿った $\alpha u + \beta v$ の M 上への射影は $\alpha u' + \beta v'$ である. $u' = Pu$ とすれば，P は X からそれ自身への線形作用素である. この P を N に沿っての M **への射影作用素** (projection operator on M along N)（あるいは単に**射影**，projection）と呼ぶ. $1 - P$ は M に沿っての N への射影である. $Pu = u$ であるためには $u \in \mathsf{M}$ であることが必要十分であり，また $Pu = 0$ であるためには $u \in \mathsf{N}$ であることが必要十分である. P の像は M であり，P の零空間は N である. $\dim \mathsf{M} = \dim \mathsf{R}(P)$ のことを，便宜上しばしば $\dim P$ と書くことがある. すべての $u \in \mathsf{X}$ に対して $Pu \in \mathsf{M}$ であるから，$PPu = Pu$. つまり P は

$$P^2 = P \tag{3.24}$$

を満たす. このような作用素を**巾等作用素**(idempotent) と称する.

逆にいかなる巾等作用素 P も射影となっている．実際，$\mathsf{M} = \mathsf{R}(P)$, $\mathsf{N} = \mathsf{R}(1-P)$ としてみよう．$u' \in \mathsf{M}$ ならば，ある u に対して $u' = Pu$ が成り立つから，$Pu' = P^2 u = Pu = u'$ を得る．同様にして，$u'' \in \mathsf{N}$ ならば $Pu'' = 0$ である．それゆえ $u \in \mathsf{M} \cap \mathsf{N}$ ならば $u = Pu = 0$ であり，したがって $\mathsf{M} \cap \mathsf{N} = 0$ である．各 $u \in \mathsf{X}$ は $u = u' + u''$, $u' = Pu \in \mathsf{M}$, $u'' = (1-P)u \in \mathsf{N}$ という形式の表現を有する．こうして P は N に沿っての M への射影であることが知られるのである．

問題 3.9. P が射影であるならば

$$\mathrm{tr}\, P = \dim P. \tag{3.25}$$

上記の諸結果は，

$$\mathsf{X} = \mathsf{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_s \tag{3.26}$$

なるいくつかの線形多様体 $\mathsf{M}_1, \cdots, \mathsf{M}_s$ が存在する場合にも拡張することができる．各 $u \in \mathsf{X}$ は $u = u_1 + \cdots + u_s$, $u_j \in \mathsf{M}_j$, $j = 1, \cdots, s$ という形式に一意的に表現することができる．そして $P_j u = u_j$ と定義される作用素 P_j は $\mathsf{N}_j = \mathsf{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_{j-1} \oplus \mathsf{M}_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_s$ に沿った M_j への射影となっている．さらに

$$\sum P_j = 1, \tag{3.27}$$

$$P_k P_j = \delta_{jk} P_j \tag{3.28}$$

が成り立つ．逆に，$P_1, \cdots, P_s$ を (3.27) および (3.28)[3]を満たす作用素としよう．$\mathsf{M}_j = \mathsf{R}(P_j)$ と書くことにすれば，(3.26) が満たされ，しかも P_j が上で定義した射影となっていることは容易に確かめられるであろう．とくに $s = 3$ の場合を考え，$P = P_1 + P_2$ とおく．すると $P_1 = P_1 P = P P_1 = P P_1 P$ である．P_1 は P と可換な射影であり，$\mathsf{R}(P_1) \subset \mathsf{R}(P)$ である．このような P_1 を P の**劣射影** (subprojection)（この条件に加えて $P_1 \neq P$ が成り立つならば狭義の劣射影）と称し，$P_1 \leqq P$ なる記号で表記する．

[3] このような族を射影の完備直交系と呼ぶことが時々ある．しかしわれわれはこの用語は用いない．この用語はやがてユニタリ空間あるいはヒルベルト空間に導入される直交射影の概念と混同を生ずるおそれがあるので，これを避けるためである．

X の基底 $\{x_j\}$ のはじめのいくつかの元が M_1 に属し，つづくいくつかの元は M_2 に属し，$\cdots$ 以下同様であるとするとき，$\{x_j\}$ は (3.26) の形の分解に適応している(adapted)という．このような基底 $\{x_j\}$ について，各 P_j は対角要素が 0 または 1 である対角行列で表現され，1 の個数は $\dim \mathsf{M}_j$ に等しい．逆にこのような行列はつねにひとつの射影を表わしている．

X の線形多様体 M のそれぞれに対して，[(3.23) が成り立つような] 相補的線形多様体 N が存在する．こうして各線形多様体はそこへの射影を有する．しかし，そのような射影は一意的ではない．

線形作用素 $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ が，ある正の整数 n について $T^n = 0$ を満たすとき，T は**巾零作用素** (nilpotent operator) であるという．巾零作用素は必ず特異である．

巾零作用素 T の構造により詳しい考察を加えてみよう．正の整数 n は $T^n = 0$ で，しかし $T^{n-1} \neq 0$ を満たすものとする．($\dim \mathsf{X} = N > 0$ と仮定する．) すると $\mathsf{R}(T^{n-1}) \neq 0$ である．$\{x_1^1, \cdots, x_{p_1}^1\}$ を $\mathsf{R}(T^{n-1})$ の基底としよう．x_i^1，$i = 1, \cdots, p_1$ はそれぞれ，ある $x_i^n \in \mathsf{X}$ に対して $x_i^1 = T^{n-1}x_i^n$ の形式を有する．$n > 1$ の場合は，$T^{n-2}x_i^n = x_i^2$，したがって $Tx_i^2 = x_i^1$ とおく．ベクトル x_i^k, $k = 1, 2$, $i = 1, \cdots, p_1$ は $\mathsf{R}(T^{n-2})$ に属し，一次独立である．実際，$\sum \alpha_i x_i^2 + \sum \beta_i x_i^1 = 0$ に T を作用させれば $\sum \alpha_i x_i^1 = 0$ が導かれ，したがってすべての i について $\alpha_i = 0$ を得る．したがって $\sum \beta_i x_i^1 = 0$ で，すべての i について $\beta_i = 0$ が成り立つ．族 $\{x_i^k\}$ に，必要ならば新しいベクトル $x_{p_1+1}^2, \cdots, x_{p_2}^2$ をつけ加えて $\mathsf{R}(T^{n-2})$ の基底をつくろう．ここで $i > p_1$ に対しては $Tx_i^2 = 0$ となるように配列を調整することができる．

$n > 2$ の場合も，同様の方法で進めばよい．そして最終的に次のような性質をもつ X の基底 $\{x_j^k\}$ に到達することができる．つまり $k = 1, \cdots, n$, $j = 1, \cdots, p_k$, $p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n$ について

$$
(3.29) \qquad T x_j^k = \begin{cases} x_j^{k-1}, & 1 \leqq j \leqq p_{k-1}\,, \\ 0, & p_{k-1} + 1 \leqq j \leqq p_k\,, \end{cases}
$$

ここで $p_0 = 0$ とする．

基底 $\{x_j^k\}$ を $\{x_1^1, \cdots, x_1^n, x_2^1, \cdots, x_2^n, \cdots\}$ の順序で配列すれば，この基底

に関する T の行列は次のような形となる．

$$
\left(\begin{array}{c:c:c}
\begin{matrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&0&1\\&&&&0\end{matrix} & & \\ \hdashline
& \begin{matrix}0&1&&\\&0&1&\\&&\cdot&1\\&&&0\end{matrix} & \\ \hdashline
& & \ddots
\end{array}\right) \tag{3.30}
$$

（特定の数字のはいっていない要素はすべてゼロ）

問題 3.10.　T が巾零作用素であれば，$N = \dim \mathsf{X}$ に対して $T^N = 0$.

問題 3.11.　T が巾零作用素であれば，$\operatorname{tr} T = 0$ かつ $\det(1 + T) = 1$.

5.　不変性と分解

M を線形多様体とし，作用素 $T \in \mathcal{B}(\mathsf{M})$ が $T\mathsf{M} \subset \mathsf{M}$ を満たすならば，M は T の下で**不変** (invariant) であるという．この場合 T は，$u \in \mathsf{M}$ に対して $T_{\mathsf{M}} u = Tu$ と定義される，M から M への線形作用素 T_{M} を**誘導する** (induce) のである．T_{M} を $\boldsymbol{T}$ **の** M **における部分** (part of T in M) と呼ぶ．

問題 3.12.　$\mathsf{R}_n = \mathsf{R}(T^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. は T の下で不変である．m を問題 3.7 のように定義すれば，T の R_n における部分は，$n < m$ のときは特異であり，また $n \geqq m$ のときは非特異である．

問題 3.13.　M が T の下で不変であれば，任意の多項式 $p(z)$ に対して，M は $p(T)$ の下で不変であり，$p(T)_{\mathsf{M}} = p(T_{\mathsf{M}})$ である．

$\mathsf{X} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{N}$ を満たす T の下で不変なふたつの線形多様体 M, N が存在するとき，T は組 M, N によって**分解される** (decomposed) (あるいは**被約である**, reduced) という．より一般的に，(3.26) が満たされ，かつすべての M_j が T の下に不変であるとき，T は線形多様体の集合 $\mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_s$ によって分解されるという [あるいは T は分解 (3.26) に従って分解されるともいう]．この場合，T はその部分 T_{M_j}, $j = 1, \ldots, s$ によって完全に記述されることとなるわけで，このとき T は T_{M_j} の **直和** (direct sum) である

と称するのである．$\{P_j\}$ を (3.26) に対応する射影の集合とするとき，T は各 P_j と可換である．実際，順に計算してゆけば $P_j u \in \mathsf{M}_j$, $T P_j u \in \mathsf{M}_j$, $P_k T P_j u = \delta_{jk} T P_j u$ が成り立ち，最後の等式を $j = 1, \ldots, s$ について加え合わせれば $P_k T u = T P_k u$, すなわち $P_k T = T P_k$ が導かれる．逆に，T がすべての P_j と可換ならば，T は $\mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_s$ によって分解される．

分解 (3.26) に適応するように基底 $\{x_j\}$ を選ぶならば，T は対角線に沿った s 個の小部分行列（T_{M_j} の行列）においてのみ，非ゼロの要素をもつ行列によって表現される．こうして T の行列は T_{M_j} の行列の直和となっているのである．

問題 3.14.　上記の記号を用いると，

$$\det T = \prod_j \det T_{\mathsf{M}_j}, \quad \operatorname{tr} T = \sum_j \operatorname{tr} T_{\mathsf{M}_j}. \tag{3.31}$$

注意 3.15.　作用素 $P_j T = T P_j = P_j T P_j$ は，これを $u \in \mathsf{M}_j$ に適用した場合は T および T_{M_j} と一致する．そこで誤解の生ずる恐れのない場合は，時としてこれを T_{M_j} と同一視する．

6.　随伴作用素

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ とする．$g \in \mathsf{Y}^*$ と $u \in \mathsf{X}$ のおのおのに対してスカラー積 $(g, T u)$ が定義され，これは u について半線形である．したがってこれはある $f \in \mathsf{X}^*$ を用いて $f[u] = (f, u)$ と書くことができる．f は g によって定まるので，Y^* 上で定義され X^* に値をとる函数 T^* が $f = T^* g$ とおくことによって定まる．こうすると T^* を定義する方程式は

$$(T^* g, u) = (g, T u), \quad g \in \mathsf{Y}^*, \quad u \in \mathsf{X} \tag{3.32}$$

である．T^* は Y^* から X^* への線形作用素，すなわち $T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}^*, \mathsf{X}^*)$ である．実際，$\bigl(T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2), u\bigr) = (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, T u) = \alpha_1 (g_1, T u) + \alpha_2 (g_2, T u) = \alpha_1 (T^* g_1, u) + \alpha_2 (T^* g_2, u) = (\alpha_1 T^* g_1 + \alpha_2 T^* g_2, u)$ であり，したがって $T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T^* g_1 + \alpha_2 T^* g_2$ を得る．この T^* を T の**随伴作用素** (adjoint operator) と呼ぶ．

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ に T^* を対応させる演算は，次のような性質をもつ．

$$(3.33) \qquad (\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*, \quad (TS)^* = S^* T^*.$$

第二の公式においては，$T \in \mathcal{B}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})$ でしかも $S \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ であり，したがって TS が定義されて $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Z})$ に属することが仮定されている．また $S^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}^*,\mathsf{X}^*)$, $T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Z}^*,\mathsf{Y}^*)$ で，したがって $S^*T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Z}^*,\mathsf{X}^*)$ であることに注意しよう．(3.33) の証明は単純で，たとえば二番目の公式は，$((TS)^*h,u) = (h,TSu) = (T^*h,Su) = (S^*T^*h,u)$ がすべての $h \in \mathsf{Z}^*$ と $u \in \mathsf{X}$ について成り立つことから導かれる．

問題 3.16. $0^* = 0$, $1^* = 1$．（ただし左辺の 0 は $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ のゼロであり，一方，右辺の 0 は $\mathcal{B}(\mathsf{Y}^*,\mathsf{X}^*)$ のゼロである．第二の等式についても同様であるが，この場合は $\mathsf{Y}=\mathsf{X}$ としなければならない.）

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ ならば，$T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}^*,\mathsf{X}^*)$ であり，また $T^{**} \in \mathcal{B}(\mathsf{X}^{**},\mathsf{Y}^{**})$ である．X^{**} と Y^{**} をそれぞれ X, Y と同一視すれば（§2.6 を見よ），(3.32) から

$$(3.34) \qquad T^{**} = T$$

が導かれる．

X, Y の基底としてそれぞれ $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ をとれば，(3.5) あるいは (3.6) により，$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ はある行列 (τ_{jk}) によって表現される．X^*, Y^* の随伴基底をそれぞれ $\{e_k\}$, $\{f_j\}$ とすれば，作用素 $T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}^*,\mathsf{X}^*)$ もまた同じようにある行列 (τ^*_{kj}) によって表現することができる．(3.10) によれば，これらの行列の要素は $\tau_{jk} = (Tx_k, f_j)$, $\tau^*_{kj} = (T^*f_j, x_k) = (f_j, Tx_k)$ によって与えられる．かくして

$$(3.35) \qquad \tau^*_{kj} = \overline{\tau_{jk}}\,, \qquad \begin{array}{l} k = 1,\ldots,N = \dim \mathsf{X}, \\ j = 1,\ldots,M = \dim \mathsf{Y} \end{array}$$

であり，互いに随伴的な基底について，T と T^* とは互いに**随伴** (adjoint)（エルミット共役）な行列によって表現されるのである．

問題 3.17. $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ とすれば，

$$(3.36) \qquad \det T^* = \overline{\det T}\,, \quad \operatorname{tr} T^* = \overline{\operatorname{tr} T}\,.$$

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ としよう．$g \in \mathsf{Y}^*$ が $\mathsf{R}(T)$ の零化集合に属するためには，すべての $u \in \mathsf{X}$ に対して $(g, Tu) = 0$ となることが必要十分である．(3.32) によれば，これは $T^*g = 0$ と同値である．こうして **T の像の零化集合は T^* の零空間と合致する**．(3.34) によれば，T と T^* の立場を入れ替えても同じことが成り立つ．これを記号的に書くと，

$$\mathsf{N}(T^*) = \mathsf{R}(T)^{\perp}, \quad \mathsf{N}(T) = \mathsf{R}(T^*)^{\perp}. \tag{3.37}$$

これから次の関係が導かれる［(3.2), (3.3) および (2.17) を見よ］．

$$\operatorname{nul} T^* = \operatorname{def} T, \quad \operatorname{nul} T = \operatorname{def} T^*, \quad \operatorname{rank} T^* = \operatorname{rank} T. \tag{3.38}$$

とくに $\mathsf{Y} = \mathsf{X}$ のときは，(3.38) により，T^* が非特異となるためには，T が非特異であることが必要十分である．この場合，

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \tag{3.39}$$

が成り立つ．これを示すには，$T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = 1^* = 1$ に注意すれば十分であろう．

問題 3.18.　$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ とすれば，

$$\operatorname{nul} T^* = \operatorname{nul} T, \quad \operatorname{def} T^* = \operatorname{def} T. \tag{3.40}$$

$P \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ が射影ならば，その随伴作用素 $P^* \in \mathcal{B}(\mathsf{X}^*)$ も同様に射影である．なぜなら $P^2 = P$ とすれば $P^{*2} = P^*$ が成り立つからである．空間 X および X^* の分解

$$\mathsf{X} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{N}, \quad \mathsf{M} = \mathsf{R}(P), \quad \mathsf{N} = \mathsf{R}(1-P), \tag{3.41}$$

$$\mathsf{X}^* = \mathsf{M}^* \oplus \mathsf{N}^*, \quad \mathsf{M}^* = \mathsf{R}(P^*), \quad \mathsf{N}^* = \mathsf{R}(1-P^*) \tag{3.42}$$

は，次の等式をつうじて相互に関連を有する．

$$\mathsf{N}^* = \mathsf{M}^{\perp}, \ \mathsf{M}^* = \mathsf{N}^{\perp}, \ \dim \mathsf{M}^* = \dim \mathsf{M}, \ \dim \mathsf{N}^* = \dim \mathsf{N}. \tag{3.43}$$

これらの等式は (3.37) および (3.40) から知られる．

いくつかの射影が存在する場合も同様の結果が成り立つ．$\{P_j\}$ を (3.27–3.28) を満たす X における射影の集合とするとき，$\{P_j^*\}$ は X^* における同

様の射影の集合である．像 $\mathsf{M}_j = \mathsf{R}(P_j)$, $\mathsf{M}_j^* = \mathsf{R}(P_j^*)$ の間には

$$\dim \mathsf{M}_j^* = \dim \mathsf{M}_j\,, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{3.44}$$

$$\mathsf{M}_1^* = (\mathsf{M}_2 \oplus \cdots)^\perp, \quad \mathsf{M}_1^\perp = (\mathsf{M}_2^* \oplus \cdots)^\perp, \text{ 等} \tag{3.45}$$

の関係が成り立つ．

問題 3.19. $\{x_j\}$ を分解 $\mathsf{X} = \mathsf{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_s$ に適合する X の基底とし，また $\{e_j\}$ を X^* の随伴基底とする．このとき $\{e_j\}$ は分解 $\mathsf{X}^* = \mathsf{M}_1^* \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_s^*$ に適応する．$\{x_{j1}, \ldots, x_{jm_j}\}$ を $\{x_j\}$ の M_j に属する部分とし，$m_j = \dim \mathsf{M}_j$ とすれば，任意の $u \in \mathsf{X}$ に対して

$$P_j\, u = \sum_{r=1}^{m_j} (u, e_{jr})\, x_{jr}\,. \tag{3.46}$$

§4. 作用素の解析

1. 作用素の収束とノルム

$N = \dim \mathsf{X} < \infty$, $M = \dim \mathsf{Y} < \infty$ とするとき，X から Y の中へのすべての線形作用素の集合 $\mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ は MN-次元の線形空間であるから，X に属するベクトル列の収束と同様，$\mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ に属する作用素列 $\{T_n\}$ の収束概念が意味をもつ．X, Y それぞれの基底 $\{x_k\}$, $\{y_j\}$ についての T_n の行列表現 (τ_{njk}) を利用すると，$T_n \to T$ は，各 j, k に対して $\tau_{njk} \to \tau_{jk}$ が成り立つことと同値である．なぜなら，τ_{njk} は $\mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ の基底 $\{P_{jk}\}$ に関する T_n の係数となっているためである（§3.2 を見よ）．ところが τ_{jk} は，基底 $\{y_j\}$ に関する Tx_k の係数である．それゆえ $T_n \to T$ は，すべての k について $T_n x_k \to T x_k$ となることに同値であり，したがってまた，すべての $u \in \mathsf{X}$ に対して $T_n u \to Tu$ が成り立つこととも同値である．はじめからこれを $T_n \to T$ の定義として採用してもかまわなかったわけである．

ベクトルの収束はノルムを利用して表現することが便利であったが，事情は作用素の収束の場合も同様である．しかし作用素のノルムは通常，ベクトルのノルムとの相関においてはじめて導入される．より厳密にいえば，X と Y とがノルム空間のとき，$\mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ は次の式によって与えられるノルムを具

えたノルム空間と定義されるのである．

$$(4.1)\quad \|T\| = \sup_{0\neq u\in\mathsf{X}} \frac{\|T_u\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|T\,u\| = \sup_{\|u\|\leqq 1} \|T\,u\|,\ T\in\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y}).$$

(4.1) における各種の表現の等値性は容易に確認することができる[1]．$\|u\| = 1$ あるいは $\|u\| \leqq 1$ を満たす u の集合はコンパクトであるから，(4.1) における "sup" を "max" で置き換えることも可能である（§ 2.4 において $f\in\mathsf{X}^*$ のノルムについて記した類似の注意を見よ）．これから $\|T\|$ は有限であることが知られる．(4.1) によって $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ 上で定義された $\|T\|$ が，ノルムの条件 (1.18) を満たすことも容易に確かめることができよう．したがって，$T_n\to T$ は $\|T_n - T\|\to 0$ と同値であることが導かれる．$\{T_n\}$ がある T に収束するための必要十分条件はコーシーの条件，つまり $\|T_n - T_m\|\to 0$, $n,m\to\infty$ によって与えられる．

$\|T\|$ のいまひとつの便利な表現は次のようである[2]．

$$(4.2)\qquad \|T\| = \sup_{\substack{0\neq u\in\mathsf{X}\\ 0\neq f\in\mathsf{Y}^*}} \frac{|(T\,u,f)|}{\|f\|\ \|u\|} = \sup_{\substack{\|u\|=1\\ \|f\|=1}} |(T\,u,f)|.$$

(4.2) と (4.1) との同値性は (2.26) から導かれる．

与えられた線形空間 X, Y に異なったノルムを導入すると，それにともなって $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ にも異なったノルムが定まる．しかし X におけるノルムの場合と同様，$\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ におけるこれらのノルムはすべて，次のような意味で同等である．すなわち任意のふたつのノルム $\|\ \|, \|\ \|'$ に対して

$$(4.3)\qquad \alpha'\,\|T\| \leqq \|T\|' \leqq \beta'\,\|T\|$$

を満たす正の定数 α', β' が存在する．これは $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ をノルム空間とみなし，この特別な場合に (1.20) を適用したまでのことである．同様に，不等式 (1.21), (1.22) からは次の不等式が得られる．

$$(4.4)\qquad |\tau_{jk}| \leqq \gamma\,\|T\|,\quad j=1,\ldots,M;\ k=1,\ldots,N,$$

[1] $\dim\mathsf{X}=0$ の場合は，(4.1) の第二，第三の数式は意味をもたない．この場合は単純に $\|T\|=0$ である．

[2] ここでは $\dim\mathsf{X}\geqq 1$, $\dim\mathsf{Y}\geqq 1$ を仮定している．

$$\|T\| \leqq \gamma' \max |\tau_{jk}|. \tag{4.5}$$

ここで (τ_{jk}) は X, Y の基底に関して定まる T の行列である．定数 γ, γ' はこれらの基底と採用されるノルムに依存するが，作用素 T からは独立である．

ベクトルの場合と同様，$\alpha S + \beta T$ はスカラー α, β と作用素 $S, T \in \mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ の連続函数であり，また $\|T\|$ は T の連続函数である．作用素ノルムの新しい特性として，次の不等式に注目すべきであろう．

$$\|TS\| \leqq \|T\|\,\|S\|, \quad T \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}, \mathsf{Z}), \quad S \in \mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}). \tag{4.6}$$

これは $\|TSu\| \leqq \|T\|\,\|Su\| \leqq \|T\|\,\|S\|\,\|u\|$ から導かれる．しかし $\mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ 等を単に線形空間とみなして勝手なノルムを与えてしまうと，(4.6) は成り立たない可能性のあることにも注意しておきたい．

問題 4.1. $\|1\| = 1$（$1 \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ は恒等作用素で $\dim \mathsf{X} > 0$ とする）．$P \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ が射影でしかも $P \neq 0$ ならば $\|P\| \geqq 1$.

TS は S と T の連続函数である．換言すれば，$T_n \to T$ かつ $S_n \to S$ ならば $T_n S_n \to TS$ が成り立つ．その証明は (2.28) と同様にすればよく，(4.6) を利用すれば十分であろう．さらに同じ方法で，Tu が T と u との連続函数であることも示される．とくに $u_n \to u$ ならば $Tu_n \to Tu$ が導かれる．この意味において，線形作用素 T は連続函数である．したがってたとえば，ベクトルの収束級数に T を項別に作用させ，

$$T\left(\sum_n u_n\right) = \sum_n T u_n \tag{4.7}$$

とする演算が許される．

X をノルム空間とするとき，$\mathcal{B}(\mathsf{X}) = \mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$ は (4.2) によってノルムの与えられた**ノルム代数** (normed algebra)（あるいは**ノルム環**，normed ring）となる．とくに $T, S \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して (4.6) が成り立つ．

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$ とすれば，$T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{Y}^*, \mathsf{X}^*)$ で，しかも

$$\|T^*\| = \|T\| \tag{4.8}$$

が成り立つ．つまり $u \in \mathsf{X}^{**} = \mathsf{X}$, $\|u\| = 1$, $f \in \mathsf{X}^*$, $\|f\| = 1$ として (4.2) によれば，$\|T^*\| = \sup |(T^* f, u)| = \sup |(f, Tu)| = \|T\|$ であるから，(4.8)

が示されたことになる．

問題 4.1a. rank T は T についての下半連続函数である．nul T および def T は上半連続である．換言すれば，$\lim T_n = T$ のとき $\liminf \operatorname{rank} T_n \geqq \operatorname{rank} T$, $\limsup \operatorname{nul} T_n \leqq \operatorname{nul} T$, および $\limsup \operatorname{def} T_n \leqq \operatorname{def} T$ である．［ヒント：rank $T = r$ とすると，Tu_j が一次独立となるような r 個のベクトル u_j が存在する．すると十分に大きな n について，$T_n u_j$ は一次独立となる（問題 2.8a を見よ）.］

2. T^n のノルム

ノルムの使い方を示す例として，また後にそれを応用する機会のあることを見越して，$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対してノルム $\|T^n\|$ を考察しておこう．(4.6) から

$$\|T^{m+n}\| \leqq \|T^m\|\,\|T^n\|, \quad \|T^n\| \leqq \|T\|^n, \quad m,\, n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.9}$$

さて $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ **が存在して，それは** $\inf_{n=1,2,\ldots} \|T^n\|^{1/n}$ **に等しいこと**を示そう．この極限を T の**スペクトル半径** (spectral radius) と呼び，spr T と表記する．後に見るとおり，spr T はその定義に用いられるノルムから独立に定まる．

$a_n = \log \|T^n\|$ とおこう．証明すべきことは

$$a_n / n \to b \equiv \inf_{n=1,2,\ldots} a_n / n \tag{4.10}$$

である．不等式 (4.9) から

$$a_{m+n} \leqq a_m + a_n \tag{4.11}$$

を得る．（このような数列 $\{a_n\}$ は**劣加法的**，subadditive であるという.）固定された正の整数 m に対して，$n = mq + r$ とおく．ただしここで q, r は $0 \leqq r < m$ なる非負の整数である．すると (4.11) から $a_n \leqq q\,a_m + a_r$ および

$$\frac{a_n}{n} \leqq \frac{q}{n}\, a_m + \frac{1}{n}\, a_r$$

が導かれる．m をひとつ固定して $n \to \infty$ とすれば，r は数 $0, 1, \ldots, m-1$ のひとつに限定されているのであるから，$q/n \to 1/m$ である．ゆえに

$\limsup_{n\to\infty} a_n/n \leqq a_m/m$. ここで m は任意であるから, $\limsup\, a_n/n \leqq b$ を得る. 他方, $a_n/n \geqq b$ であり, したがって $\liminf\, a_n/n \geqq b$. これで (4.10) が示されたのである[3].

注意 4.2. 上記の結果から $\|T^n\|^{1/n}$ が単調非増加であると予想する向きがあるかもしれない. しかし次の事例から知られるとおり, この予想は正しくない. $\mathsf{X} = \mathsf{C}^2$ とし, (1.17) によるノルムが与えられているものとしよう. (つまり X は 2 次元のユニタリ空間である. §6 を見よ.) また T は行列

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a > b > 0$$

によって定まるものとする. すると次のような関係が容易に知られる (ここで 1 は単位行列).

$$T^{2n} = a^{2n} b^{2n} 1, \quad T^{2n+1} = a^{2n} b^{2n} T, \quad \|T^{2n}\|^{1/2n} = ab,$$
$$\|T\| = a^2, \quad \|T^{2n+1}\|^{1/(2n+1)} = ab\,(a/b)^{1/(2n+1)} > ab.$$

次に $\|T^{-1}\|$ を考え, $\|T\|$ と $\det T$ を用いて $\|T^{-1}\|$ を評価する不等式を導くことにしよう. T は非特異であることを仮定する. $Tu = v$ という関係は一次方程式 (3.6) によって表現される. これらの方程式を ξ_k について解けば分数表現が得られ, その分母は $\det T$, 分子は行列 (τ_{jk}) の小行列式に等しい係数をもつ η_k の一次結合である. $N = \dim \mathsf{X}$ とするとき, この小行列式は次数 $N-1$ の, τ_{jk} についての多項式になる. 不等式 $\|u\| \leqq \gamma' \max|\xi_j|$ [(1.22) を見よ], $|\tau_{jk}| \leqq \gamma''\|T\|$ [(4.4) を見よ] および $|\eta_j| \leqq \gamma'''\|v\|$ [(1.21) を見よ] により, $\|u\| \leqq \gamma\|v\|\;\|T\|^{N-1}/|\det T|$, すなわち

$$\|T^{-1}\| \leqq \gamma \frac{\|T\|^{N-1}}{|\det T|} \tag{4.12}$$

を満たす定数 γ の存在が知られる. この定数 γ は T からは独立で, 用いられるノルムにのみ依存する[4].

[3] Pólya and Szegö 【1】, p. 17 を見よ. Hille and Phillips 【1】, pp. 124, 224 も参照.

[4] X がユニタリ空間の場合は, $\gamma = 1$ とおくことができる. T. Kato [13] を見よ.

3. ノルムの例

作用素 T のノルム $\|T\|$ は，定義域および値域となる空間 X, Y に採用されるノルムとの相関において決定されるのであるから，$\|T\|$ の選択にはベクトルのノルムの選択の場合ほど自由度は大きくない．同じ理由で，$\|T\|$ の値を正確に計算するのは，必ずしも容易ではない．しかし $\|T\|$ の上限を評価することがしばしば必要となる．そのような評価がいかにして得られるのか，例を以て示すことにしよう．

ベクトルのノルムの中で最も普通に使われるものは，$p \geqq 1$ を固定して

$$\|u\| = \|u\|_p = \Big(\sum_j |\xi_j|^p\Big)^{1/p} \tag{4.13}$$

によって定義される **p-ノルム** (p-norm) である．ここで ξ_j は固定された基底 $\{x_j\}$ に関する u の係数である（これを**標準基底**，canonical basis と称する）．この p-ノルムはノルムの条件 (1.18) を満たしている．[(1.18) の第三の条件はミンコフスキーの不等式として知られている[5].] $p = 1$ および 2 の特殊ケースについては先にふれた．(1.16), (1.17) を見ていただきたい．(1.15) によって与えられるノルム $\|u\| = \max|\xi_j|$ は $p = \infty$ に対する (4.13) の極限的ケースとみなすことができよう．

さてそこで，X, Y に同一の p を用いた p-ノルムが定まっているとしよう．これに対応して定まる，X から Y への作用素 T のノルム $\|T\|$ を，X, Y の標準基底に関する T の行列 (τ_{jk}) を用いて評価してみよう．$v = Tu$ とすれば，u および v それぞれの係数 ξ_k, η_j は方程式 (3.6) によって関係づけられている．

$$\tau'_j = \sum_k |\tau_{jk}|, \quad \tau''_k = \sum_j |\tau_{jk}| \tag{4.14}$$

を行列 $(|\tau_{jk}|)$ の行和および列和とする．すると (3.6) により，

$$\frac{|\eta_j|}{\tau'_j} \leqq \sum_k \frac{|\tau_{jk}|}{\tau'_j}\,|\xi_k|.$$

j を固定したとき，非負の数 $|\tau_{jk}|/\tau'_j$, $k = 1, \ldots, N$ は和が 1 であるから，上記不等式の右辺は $|\xi_k|$ の加重平均になっている．λ^p は $\lambda \geqq 0$ に関する凸函数であるから，右辺の p 乗の巾は，同じ加重で計算した $|\xi_k|^p$ の加重平均を超えることはない[6].こうして

---

5 その証明は実解析のどんな教科書にも見出すことができる．たとえば Hardy, Littlewood and Pólya【1】, p. 31; Royden【1】, p. 97.

6 凸函数については，たとえば Hardy, Littlewood and Pólya【1】, p. 70 を見よ．

$$\left(\frac{|\eta_j|}{\tau'_j}\right)^p \leqq \sum_k \frac{|\tau_{jk}|}{\tau'_j} |\xi_k|^p$$

であり，逐次計算により次の式を得る．

$$|\eta_j|^p \leqq \tau_j'^{p-1} \sum_k |\tau_{jk}|\ |\xi_k|^p \leqq \left(\max_j \tau'_j\right)^{p-1} \sum_k |\tau_{jk}|\ |\xi_k|^p,$$

$$\|v\|^p = \sum_j |\eta_j|^p \leqq \left(\max_j \tau'_j\right)^{p-1} \sum_k \tau''_k |\xi_k|^p \leqq \left(\max_j \tau'_j\right)^{p-1} \left(\max_k \tau''_k\right) \|u\|^p.$$

ゆえに

$$\|T\,u\| = \|v\| \leqq \left(\max_j \tau'_j\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\max_k \tau''_k\right)^{\frac{1}{p}} \|u\|. \tag{4.15}$$

これから

$$\|T\| \leqq \left(\max_j \tau'_j\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\max_k \tau''_k\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.16}$$

が示されたのである[7]．$p = 1$ の場合，(4.16) の右辺第一項は 1 に等しく，τ'_j に依存しない．$p \to \infty$ とすれば，(4.16) は $p = \infty$ の場合にも成り立つことが知られる．このとき右辺第二項は 1 となり，これは τ''_k に依存しない．

問題 4.3. (τ_{jk}) を対角行列（$j \neq k$ に対しては $\tau_{jk} = 0$）とすれば，任意の p に対して

$$\|T\| \leqq \max_j\ |\tau_{jj}| \tag{4.17}$$

を得る．

4. 作用素の無限級数

作用素の無限級数 $\sum T_n$ の収束についてはベクトルの無限級数の場合と同様に定義することができるので，ここでは繰り返すまでもあるまい．また作用素の級数の**絶対収束** (absolute convergence) とは，あるノルム $\|\ \|$ （したがっていかなるノルムでもよい）について級数 $\sum \|T_n\|$ が収束することを意味するのも，ベクトルの級数の場合と同じである．作用素の級数が絶対収

[7] 実はこの関係は M. Riesz の凸性定理の単純な帰結である（Hardy, Littlewood and Pólya【1】, p. 203 を見よ）．

束すれば，$\sum T_n$ は収束し，$\|\sum T_n\| \leqq \sum \|T_n\|$ が成り立つ．

作用素の乗法が可能であることにより，作用素の級数については，ベクトルの場合には見られない，ある種の公式が存在する．たとえば，$\sum T_n$ が収束し，また積に意味のある場合には，

$$S\left(\sum T_n\right) = \sum S\,T_n\,,\quad \left(\sum T_n\right) S = \sum T_n\,S \tag{4.18}$$

が成り立つ．これは ST が S および T の函数として連続であることから導かれる．絶対収束するふたつの級数は項別にかけ合わせることができる．すなわち，積に意味のある場合は

$$\left(\sum S_m\right)\left(\sum T_n\right) = \sum S_m\,T_n\,. \tag{4.19}$$

ここで右辺の項の順序は任意でよい（あるいはこれを二重級数とみなすこともできる）．証明は数の級数の場合と本質的に異なるところはないので，省略してもさしつかえないであろう．

例 4.4.　（指数函数）

$$e^{tT} = \exp(t\,T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,t^n\,T^n,\quad T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})\,. \tag{4.20}$$

この級数はすべての複素数 t について絶対収束する．なぜなら第 n 項のノルムは $|t|^n\,\|T\|^n/n!$ によって上からおさえられるからである．また

$$\|e^{tT}\| \leqq e^{|t|\,\|T\|} \tag{4.21}$$

が成り立つ．さらに次の関係が得られる．

$$TS = ST \text{ ならば }\quad e^{t(T+S)} = e^{tT}e^{tS} = e^{tS}e^{tT}. \tag{4.21a}$$

これは (4.20) に基づく直接的な計算によって確かめることができる．また $(d/dt)e^{tT}e^{tS} = (T+S)e^{tT}e^{tS}$ を用いると，別証が与えられる [後述 (4.31) を見よ]．こうすると $(d/dt)^n e^{tT}e^{tS} = (T+S)^n e^{tT}e^{tS}$, $n = 1, 2, \cdots$ であり，$e^{tT}e^{tS}$ のテイラー展開として (4.21a) が導かれる．(4.21a) の特別な場合として，

$$e^{(t+s)T} = e^{tT}e^{sT},\quad e^{t(T+c)} = e^{ct}e^{tT} \tag{4.21b}$$

が得られる．ここで c はスカラーである．

(4.21b) は，t がすべての複素数 (または実数) を変わるとき，$\{e^{tT}\}$ が作用素の群(group)を成すことを示している．T を群 $\{e^{tT}\}$ の (無限小) **生成作用素** (generator) と呼ぶ．生成作用素は

$$T = \lim_{t \to 0} t^{-1}(e^{tT} - 1) \tag{4.21c}$$

なる関係によって，群から一意的に定まる．

例 4.5. (ノイマン級数)

$$(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \quad \|(1-T)^{-1}\| \leqq (1-\|T\|)^{-1}, \tag{4.22}$$
$$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X}).$$

$\|T^n\| \leqq \|T\|^n$ により，この級数は $\|T\| < 1$ に対して絶対収束である．和 $\sum T^n$ を S と書くことにすれば，項別の乗法により $TS = ST = S - 1$ が成り立つ．ゆえに $(1-T)S = S(1-T) = 1$ で，さらに $S = (1-T)^{-1}$ である．**作用素 $R \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ が $\|1 - R\| < 1$ を満たすならば，R は非特異であることが知られる．**

$\|T\| < 1$ (あるいは $\|1 - R\| < 1$) であるや否やは，X において用いられるノルムに依存する可能性のあることに注意を要する．つまりあるノルムについては $\|T\| < 1$ が成り立つが，他のノルムについては成り立たないという事態が十分に生じうるのである．

問題 4.6. ある正の整数 m に対して $\|T^m\| < 1$ が成り立つならば，あるいは同じことであるが spr $T < 1$ ならば，級数 (4.22) は絶対収束する (spr T については§ 4.2 を見よ)．そしてその和は再び $(1-T)^{-1}$ に等しい．

一次方程式 $(1-T)u = v$ を u について解くためのいわゆる**逐次計算法** (iteration method) においては，部分和 $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$ が $S = (1-T)^{-1}$ に対する近似として用いられ，また $u_n = S_n v$ が解 $u = Sv$ に対する近似として利用される．この近似によって生ずる誤差を評価すれば，

$$\|S - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} T^k \right\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{n+1}}{1 - \|T\|}. \tag{4.23}$$

$n=0$ とおけば，(4.23) から $\|(1-T)^{-1}-1\| \leqq \|T\|(1-\|T\|)^{-1}$ を得る．$R=1-T$ とすると，$R \to 1$ から $R^{-1} \to 1$ が導かれる．換言すれば，R^{-1} は $R=1$ において R の連続函数なのである．これは **T^{-1} が T の連続函数である** ことを主張する定理の特殊な場合にほかならない．より厳密にいえばこうである．$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ が非特異ならば，$\|S-T\|$ が十分に小さいかなる $S \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ もまた非特異であり，また $\|T-S\| \to 0$ ならば $\|S^{-1}-T^{-1}\| \to 0$ である．とくに，**$\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ におけるすべての非特異な元の集合は開集合である．**［もちろん $\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ に非特異な元が存在するためには，X と Y とは同次元でなくてはならない.］

これを示すために $A=S-T$ とおき，$\|A\|<1/\|T^{-1}\|$ と仮定しよう．このとき $\|AT^{-1}\| \leqq \|A\|\,\|T^{-1}\|<1$ であり，したがって上記の帰結から，$1+AT^{-1}$ は $\mathcal{B}(\mathsf{Y})$ の非特異な作用素である．$S=T+A=(1+AT^{-1})T$ であるから，S もまた非特異で $S^{-1}=T^{-1}(1+AT^{-1})^{-1}$ である．

(4.22), (4.23) によって与えられる $\|(1+AT^{-1})^{-1}\|$ および $\|(1+AT^{-1})^{-1}-1\|$ の評価を用いると，$\|S^{-1}\|$, $\|S^{-1}-T^{-1}\|$ に関する次の評価が得られる．

$$\|S^{-1}\| \leqq \frac{\|T^{-1}\|}{1-\|A\|\,\|T^{-1}\|},\quad \|S^{-1}-T^{-1}\| \leqq \frac{\|A\|\,\|T^{-1}\|^2}{1-\|A\|\,\|T^{-1}\|}, \tag{4.24}$$

$$\text{ここで}\quad S=T+A,\quad \|A\|<1/\|T^{-1}\|.$$

注意 4.7. 上記の議論では，S^{-1} の存在を示すために $\|A\|<\|T^{-1}\|$ を仮定した．しかし $\mathsf{X}=\mathsf{Y}$ かつ $TS=ST$ のときは，この条件を緩和することができる．この場合は A と T とが可換となるから，A と T^{-1} も可換である．したがって

$$\begin{aligned}\operatorname{spr} AT^{-1} &= \lim \left\|(AT^{-1})^n\right\|^{1/n} = \lim \left\|A^n T^{-n}\right\|^{1/n} \\ &\leqq \left[\lim \|A^n\|^{1/n}\right]\left[\lim \|T^{-n}\|^{1/n}\right] \\ &= (\operatorname{spr} A)(\operatorname{spr} T^{-1}).\end{aligned} \tag{4.25}$$

したがって

$$\operatorname{spr} A < (\operatorname{spr} T^{-1})^{-1} \tag{4.26}$$

ならば $S^{-1}=T^{-1}(1+AT^{-1})^{-1}$ が存在することが知られるのである．

5. 作用素値の函数

実または複素変数について定義され，$\mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$ の中に値をとる作用素値の函数 $T_t = T(t)$ を，§1.7 におけるベクトル値函数 $u(t)$ とちょうど同じように定義し，取り扱うことができる．しかし $T(t)$ については，積 $T(t)u(t)$, $S(t)T(t)$ が定義されることから，ここでもまた新しい特徴が現われる．すなわちたとえば，積に意味があり，右辺の導函数が存在する場合にはいつでも次のような公式が得られるのである．

$$\frac{d}{dt} T(t)\, u(t) = T'(t)\, u(t) + T(t)\, u'(t)\,, \tag{4.27}$$

$$\frac{d}{dt} T(t)\, S(t) = T'(t)\, S(t) + T(t)\, S'(t)\,.$$

また $T(t)^{-1}$ および $T'(t)$ が存在するときは必ず，

$$\frac{d}{dt} T(t)^{-1} = -T(t)^{-1}\, T'(t)\, T(t)^{-1} \tag{4.28}$$

が成り立つ．これは等式

$$S^{-1} - T^{-1} = -S^{-1}(S-T)\, T^{-1} \tag{4.29}$$

と，第 4 項で示したように，T^{-1} が T の函数として連続であることから導かれる．

作用素値函数の積分については，(1.30) と類似した公式が得られ，さらにこれに加えて，次の関係も成り立つ．

$$\int S\, u(t)\, dt = S \int u(t)\, dt, \quad \int T(t)\, u\, dt = \left(\int T(t) dt\right) u\,, \tag{4.30}$$

$$\int S\, T(t)\, dt = S \int T(t)\, dt, \quad \int T(t)\, S\, dt = \left(\int T(t)\, dt\right) S\,.$$

ここで再び，格別の重要性を有するのは，複素変数 t についての**正則** (holomorphic) 函数 $T(t)$ である．この場合も，ベクトル値函数に対して与えられたのと同じ注意（§1.7 を見よ）が妥当する．このほかに，次の注意をつけ加えておくべきであろう．すなわち各函数がすべて正則であるならば，$S(t)\, T(t)$

および $T(t)\,u(T)$ もやはり正則であること，そして $T(t)$ が正則でしかも $T(t)^{-1}$ が存在するならば $T(t)^{-1}$ も必ず正則であること，これである．[後半は (4.28) から導かれる.]

ベクトル値函数や作用素値函数に複素函数論を適用するのには，もちろん制約がある．たとえば，ふたつのベクトル値函数には乗法が定義されない．また作用素値の函数には乗法が定義されるけれども，除法は必ずしも可能ではない．このように正則な作用素値函数 $T(t)$ に対して，$T(t)^{-1}$ が存在するとは限らないのである．しかし $T(t)$ が正則（あるいは有理型でもよい）で，ある一点 t_0 において $T(t_0)^{-1}$ が存在するならば，$T(t)^{-1}$ が有理型函数として存在することが後に示される（定理　-1.5a を見よ）．

例 4.8.　(4.20) で定義された指数函数 e^{tT} は t の**整函数** (entire function)（複素平面の全体で正則な函数）であり，

$$\frac{d}{dt}\,e^{tT} = T\,e^{tT} = e^{tT}\,T. \tag{4.31}$$

例 4.9.　複素数のパラメータをもつノイマン級数

$$S(t) = (1 - t\,T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,T^n \tag{4.32}$$

を考える．問題 4.6 により，この級数は $|t| < 1/\mathrm{spr}\,T$ に対して絶対収束する．実際，(4.32) の**収束半径 r はちょうど $1/\mathrm{spr}\,T$ に等しい**．$S(t)$ は $|t| < r$ に対して正則であるから，数の巾級数の場合と同様，コーシーの不等式により，すべての n と $r' < r$ に対して $\|T^n\| \leqq M_{r'}r'^{-n}$ を得る[8]．($M_{r'}$ は n から独立.) したがって $\mathrm{spr}\,T = \lim \|T^n\|^{1/n} \leqq r'^{-1}$ であり，極限 $r' \to r$ に移って，$\mathrm{spr}\,T \leqq r^{-1}$, すなわち $r \leqq 1/\mathrm{spr}\,T$ が導かれる．反対の不等式は上で証明されているので，これを以て所望の結果の証明が終わるのである．ついでながら，$\mathrm{spr}\,T$ はその定義に用いられるノルムからは独立であることが知られる．

---

[8] $T^n = (2\pi i)^{-1}\int_{|t|=r'} t^{-n-1}S(t)dt$ であり，したがって $\|T^n\| \leqq (2\pi)^{-1}\int_{|t|=r'} r'^{-n-1} \cdot\|S(t)\|\;|dt| \leqq r'^{-n}M_{r'}$ となる．ここで $M_{r'} = \max_{|t|=r'}\|S(t)\| < \infty$.

6. 射影の組

作用素を扱う解析学の応用として，また後の応用面も考慮して，射影（巾等作用素）の組に関するいくつかの定理を証明しよう[9]．§3.4 において定義したように，射影 P とは $P^2 = P$ を満たす $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ の作用素である．$1-P$ も P とともに射影となる．

$P, Q \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ をふたつの射影とする．このとき

$$R = (P-Q)^2 = P + Q - PQ - QP \tag{4.33}$$

は $\boldsymbol{P}$ **および** $\boldsymbol{Q}$ **と可換である**．これは $PR = P - PQP = RP$ および Q についても同様の関係の成り立つことから確認される．$1-P$ は射影であるから，上と同じ理由で，$(1-P-Q)^2$ は P および Q と可換である．実際，直接的な計算によって確かめられるように，等式

$$(P-Q)^2 + (1-P-Q)^2 = 1 \tag{4.34}$$

が成り立つ．もうひとつの有用な等式は

$$(PQ - QP)^2 = (P-Q)^4 - (P-Q)^2 = R^2 - R \tag{4.35}$$

であり，その証明もやはりきわめて容易なので，読者に委ねよう．

いま

$$U' = QP + (1-Q)(1-P), \tag{4.36}$$

$$V' = PQ + (1-P)(1-Q)$$

とおく．U' は $\mathsf{R}(P) = P\mathsf{X}$ を $Q\mathsf{X}$ へと写し，$(1-P)\mathsf{X}$ を $(1-Q)\mathsf{X}$ へと写す．他方，V' は $Q\mathsf{X}$ を $P\mathsf{X}$ へ，また $(1-Q)\mathsf{X}$ を $(1-P)\mathsf{X}$ へと写す．しかしこれらの写像は互いに逆写像になっているわけではない．実際，

$$V'U' = U'V' = 1 - R \tag{4.37}$$

---

9 T. Kato [9] から採った次の結果は，X が ∞ 次元のバナッハ空間の場合でも成り立つ．ユニタリ空間（ヒルベルト空間）における射影を扱う特別な場合については，§6.8 を見よ．関連する諸結果については，Akhiezer and Glazman【1】, Sz.-Nagy [1], [2], Wolf [1] を参照.

であることは容易に知られる．しかし R が P, Q と可換であり，したがって U', V' とも可換であることにより，上記のような写像としての性質を具え，相互に逆作用素の関係に立つ U, V の組は，これを簡単に構成することができる．$1-R$ の逆平方根 $(1-R)^{-1/2}$ が存在するという条件の下で，

$$U = U'(1-R)^{-1/2} = (1-R)^{-1/2}\,U', \tag{4.38}$$

$$V = V'(1-R)^{-1/2} = (1-R)^{-1/2}\,V'$$

とすればよいのである．この作用素の自然な定義は二項級数

$$(1-R)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-R)^n \tag{4.39}$$

によって与えられる．この級数は $\|R\| < 1$，あるいはより一般的に

$$\text{spr } R < 1 \tag{4.40}$$

なる条件の下で絶対収束し，またこの級数の和 T は，数の二項級数の場合とちょうど同じように $T^2 = (1-R)^{-1}$ なる関係を満たす．かくして[10]

$$VU = UV = 1, \quad V = U^{-1}, \quad U = V^{-1} \tag{4.41}$$

が成り立つのである．

(4.36) から知られるとおり，$U'P = QP = QU'$ かつ $PV' = PQ = V'Q$ であるから，R とここで考えている他のすべての作用素との可換性により，$UP = QU$ および $PV = VQ$ を得る．こうして

$$Q = UPU^{-1}, \quad P = U^{-1}QU \tag{4.42}$$

が成り立つのである．したがって P と Q とは互いに相似 (similar) である（§5.7 を見よ）．P と Q は，たとえば $v = Pu$ のような任意の線形関係が，一対一の線形写像 $U : u' = Uu, v' = Uv$ によって $v' = Qu'$ に転換されると

[10] 後に (§6.7) 示すとおり，$\mathbf{X}$ がユニタリ空間で P, Q が直交射影であるとき，U と V はユニタリとなる．Sz.-Nagy [1] と Wolf [1] にも，同じ U が異なった表現で現れる．これが上記の U と同一物であることは T. Kato [9] において示された．

いう意味で，互いに同型である．とくにその像 $P\mathsf{X}$, $Q\mathsf{X}$ は U, U^{-1} によって互いに他方の上へ写されるので，**同型** (isomorphic) である．こうして

$$\dim P = \dim Q, \quad \dim(1-P) = \dim(1-Q)\,. \tag{4.43}$$

この結果からただちに導かれる帰結は次のようである．

補題 4.10. $P(t)$ は実または複素数の（連結な）領域内を変化するパラメータ t に連続に依存する射影とする．このとき異なった t に対する像 $P(t)\mathsf{X}$ は互いに同型である．とくに $\dim P(t)\mathsf{X}$ は一定である．

この主張を理解するためには，十分に小さな $|t'-t''|$ に対して $\|P(t')-P(t'')\|<1$ が成り立ち，したがって上記の結果を $P(t')$, $P(t'')$ の組に適用できることに注意すれば十分であろう．

問題 4.11. 仮定 (4.40) の下において，$PQ\mathsf{X}=P\mathsf{X}$, $QP\mathsf{X}=Q\mathsf{X}$. ［ヒント：$PQ=PV'=PU^{-1}(1-R)^{1/2}$.］

問題 4.11a. $\operatorname{spr} R<1$ ならば，P と Q との相似性は $Z=(1-R)^{-1/2}(1-P-Q)$ を用いても確保される：すなわち $Q=ZPZ^{-1}$. さらに $Z=U(1-2P)=(1-2Q)U$.

問題 4.12. 任意のふたつの射影 P, Q に対して次の関係が成り立つ．

$$(1-P+QP)(1-Q+PQ)=1-R \tag{4.44}$$

［R は (4.33) によって与えられている］,

(4.45) $\operatorname{spr} R<1$ ならば

$$(1-P+QP)^{-1}=(1-R)^{-1}(1-Q+PQ).$$

$\operatorname{spr} R<1$ の場合，$W=1-P+QP$ は $P\mathsf{X}$ を $Q\mathsf{X}$ の上へ写し，$u\in(1-P)\mathsf{X}$ に対しては $Wu=u$ である．一方，W^{-1} は $Q\mathsf{X}$ を $P\mathsf{X}$ の上へ写し，$u\in(1-P)\mathsf{X}$ に対しては $W^{-1}u=u$ である．そして $\mathsf{X}=Q\mathsf{X}\oplus(1-P)\mathsf{X}$ が成り立つ．

問題 4.13. $\operatorname{spr}(P-Q)^2<1$ なる任意のふたつの射影 P, Q に対して，$P(0)=P$, $P(1)=Q$ を満たし，t に正則に依存する射影の族 $P(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ が存在する．［ヒント：$2P(t)=1+\bigl(2P-1+2t(Q-P)\bigr)\cdot\bigl(1-4t(1-t)R\bigr)^{-1/2}$ とおけ.］

7. 積公式

補題 4.14. $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ とし，また $B_n(t) \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$, $n = 1, 2, \ldots$ で，かつ $n \to \infty$ のとき，$t \in \mathrm{D}$ に対して一様に $\|B_n(t)\| \to 0$ が成り立つものとする．ここで D は複素平面の有界な一般領域である．このとき $t \in \mathrm{D}$ に対して一様に

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 + (t/n)(A + B_n(t))\right]^n = e^{tA}. \tag{4.46}$$

証明. $V_n(t) = 1 + (t/n)(A + B_n(t))$ と書く．すると $0 \leqq k \leqq n$ および $t \in \mathrm{D}$ に対して

$$\begin{aligned} \|V_n^k\| &\leqq \left[1 + |t/n|\left(\|A\| + \|B_n\|\right)\right]^k \\ &\leqq \left[1 + |t/n|\left(\|A\| + \|B_n\|\right)\right]^n \\ &\leqq e^{|t|\,(\|A\|+\|B_n\|)} \leqq M \end{aligned} \tag{4.47}$$

が成り立つ．ここで M は定数であり，また $B_n(t), V_n(t)$ における変数 t を省略して書いた．

$U_n(t) = e^{(t/n)A}$ と書くことにすれば，$U_n^n = e^{tA}$ および $\|U_n^k\| \leqq M$ も成り立つ．さらに

$$V_n^n - U_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} V_n^j\,(V_n - U_n)\,U_n^{n-j-1} \tag{4.48}$$

である．

$$\begin{aligned} V_n - U_n &= 1 + (t/n)(A + B_n) - \left[1 + (t/n)\ A + (t^2/2n^2)\,A^2 + \cdots\right] \\ &= (t/n)\left[B_n - (t/2n)\,A^2 + \cdots\right] \end{aligned}$$

であるから，n が十分に大きいときは

$$\|V_n - U_n\| \leqq |t/n|\,\|B_n\| + |t/n|^2\,\|A\|^2 \tag{4.49}$$

が成り立つ．

これらの評価から，$n \to \infty$ のとき，$t \in \mathrm{D}$ について一様に

(4.50) $$\|V_n^n - U_n^n\| \leqq n\,M^2\left[\,|t/n|\,\|B_n\| + |t/n|^2\,\|A\|^2\right] \to 0\,.$$

これで補題が証明された．($U_n^n = e^{tA}$ であることを想起せよ．)

系 4.15. 任意の $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対し，複素パラメータ t のいかなる有界な一般領域においても一様に

(4.51) $$e^{tA} = \lim_{n\to\infty}\left[1 + (t/n)\,A\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - (t/n)\,A\right]^{-n}$$

が成り立つ．

系 4.16. （リー＝トロッターの積公式）任意の $A, B \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対し，複素パラメータ t のいかなる有界な一般領域においても一様に

(4.52) $$\lim_{n\to\infty}\left[e^{(t/n)A}\,e^{(t/n)B}\right]^n = e^{t(A+B)}$$

が成り立つ．

証明. (4.51) の最初の公式は，$B_n(t) = 0$ とおけば補題 4.14 から導かれる．第二の公式は

$$\left[1 - (t/n)\,A\right]^{-1} = 1 + (t/n)\,A + o\,(1/n)$$

から導かれる．ここで $o\,(1/n)$ は，$n \to \infty$ のときそのノルムが任意の有界な一般領域で t について一様に $o\,(1/n)$ であるような作用素を表わしている．また同様にして，(4.52) は次の関係から導かれる．

$$\begin{aligned} e^{(t/n)A}\,e^{(t/n)B} &= \left[1 + (t/n)\,A + o\,(1/n)\right]\left[1 + (t/n)\,B + o\,(1/n)\right] \\ &= 1 + (t/n)(A+B) + o\,(1/n). \end{aligned}$$

注意 4.17. (4.52) において，$e^{(t/n)A}$ の項は $1 + (t/n)A$, $\left(1 - (t/n)A\right)^{-1}$, $\left(1 - (t/n)(A/k)\right)^{-k}$ あるいはさらに一般的に $\phi(tA/n)$ によって置き換えてもよい．ここで $\phi(\zeta)$ は $\phi(0) = \phi'(0) = 1$ を満たし，$\zeta = 0$ において正則な任意の函数である．$e^{(t/n)B}$ 項についても同様である．さらにそのような項 $\phi_j(tA_j/n)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ はふたつではなくいくつあってもよく，その極限は $\exp\left[t(A_1 + \cdots + A_r)\right]$ となる．

§ 5. 固有値問題

1. 定義

本節では X を $0 < \dim \mathsf{X} = N < \infty$ なる所与の線形空間とするが，便宜に応じて，適当なノルムを導入することにより，X をノルム空間と考える．

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ とする．複素数 λ に対して

$$Tu = \lambda u \tag{5.1}$$

を満たすゼロでないベクトル $u \in \mathsf{X}$ が存在するとき，λ は T の**固有値** (eigenvalue, proper value あるいは**特性値**，characteristic value) であるという．また u は固有値 λ に属する（対応する，等）**固有ベクトル** (eigenvector, proper vector)（あるいは**特性ベクトル**，characteristic vector）と呼ばれる．$Tu = \lambda u$ を満たすすべての $u \in \mathsf{X}$ の集合 N_λ は X の線形多様体であり，それを固有値 λ に対する T の**（幾何的）固有空間** ((geometric) eigenspace), $\dim \mathsf{N}_\lambda$ を λ の**（幾何的）重複度** ((geometric) multiplicity) と称する．λ が固有値でない場合でも，N_λ を定義することは可能であり，そのときは $\mathsf{N}_\lambda = 0$ となる．この場合，N_λ を固有値 λ に対する重複度ゼロの固有空間と称することがしばしば便利である．ただしこの用語法は，厳密には固有値の定義に適合するものではない．

問題 5.1. λ が T の固有値であるためには，$\lambda - \zeta$ が $T - \zeta$ の固有値であることが必要十分である．N_λ は $T - \lambda$ の零空間であり，T の固有値 λ の幾何的重複度は $T - \lambda$ の退化次数に等しい．$T - \lambda$ が特異であるためには，λ が T の固有値であることが必要十分である．

相異なる固有値に属する固有ベクトルは一次独立であることは容易に証明される．したがって **T の固有値はたかだか N 個である**ことがわかる．T のすべての固有値の集合を T の**スペクトル** (spectrum) と称し，それを $\Sigma(T)$ で表わす．こうすると $\Sigma(T)$ は N 個より多くない元をもつ有限集合である．

固有値問題 (eigenvalue problem) とは，与えられた作用素 T のすべての固有値と固有ベクトル（あるいは固有空間）を見出すことを主要な課題とするものである．ベクトル $u \neq 0$ が T の固有ベクトルであるためには，u の

張る 1 次元線形多様体 $[u]$ が T の下で不変である（§3.5 を見よ）ことが必要十分である．こう考えると，固有値問題とは T に対するすべての不変線形多様体を決定する問題（固有値問題の一般形）の一特殊ケースとなる．

M を T の不変部分空間とすると，T の M における部分 T_{M} が定義される．容易に知られるように，T_{M} のいかなる固有値［固有ベクトル］も T の固有値［固有ベクトル］である．便宜上，T_{M} の固有値を **T の M における固有値** (eigenvalue of T in M) と呼ぶ．

T と可換な射影 P が存在するとき，T は分解 $\mathsf{X} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{N}$, $\mathsf{M} = P\mathsf{X}$, $\mathsf{N} = (1-P)\mathsf{X}$ にしたがって分解される（§3.5 を見よ）．T に対する固有値問題を解くためには，T の M および N における部分に対する固有値問題を考察すれば十分である[1]．T の M における部分 T_{M} は，注意 3.15 に述べた意味で，作用素 $PT = TP = PTP$ と同一視してよい．しかし TP は T_{M} の固有値に加えて，固有空間として N をもち，したがって重複度 $N - m$（ここで $m = \dim P\mathsf{X}$）の固有値ゼロを有することに注意しなければならない[2]．

問題 5.2.　T のいかなる固有値の絶対値も $\|T\|$ を超えない．ここで $\| \; \|$ は X の任意のノルムに対応する $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ のノルムである．

問題 5.3.　ある基底に関して T が対角行列で表現できるならば，T の固有値はそのすべての対角要素（のうち相異なるもの）と合致する．

2.　レゾルベント

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ とし，非斉次の一次方程式

$$(T - \zeta)\, u = v \tag{5.2}$$

---

[1] $Tu = \lambda u$ ならば，$TPu = PTu = \lambda Pu$ であり，したがって $Pu \in \mathsf{M}$ は，それが 0 でなければ，固有値 λ に対する T（および T_{M}）の固有ベクトルになる．$(1-P)u$ についても同様である．このように T のいかなる固有値も，少なくとも T_{M}, T_{N} のうちいずれかの固有値でなければならない．また T のいかなる固有ベクトルも，同一の固有値に対する T_{M}, T_{N} の固有ベクトルの和である．λ に対する T の固有空間は，λ に対する T_{M}, T_{N} の固有空間の直和となる．

[2] 厳密に述べれば，これは T_{M} が固有値として 0 をもたない場合にのみ正しい．もし T_{M} が固有値 0 をもち，その固有空間を L とすれば，TP の固有値 0 に対する固有空間は $\mathsf{N} \oplus \mathsf{L}$ である．

を考えることにしよう．ここで ζ は所与の複素数，$v \in \mathsf{X}$ も所与であり，$u \in \mathsf{X}$ が求められるべき未知変数である．あらゆる v に対してこの方程式が解をもつためには，$T-\zeta$ が非特異であること，すなわち ζ が T のいかなる固有値 λ_k とも異なる値であることが必要十分である．この場合逆作用素 $(T-\zeta)^{-1}$ が存在し，解 u は

$$u = (T-\zeta)^{-1}\, v \tag{5.3}$$

によって与えられる．

作用素値の函数

$$R\,(\zeta) = R\,(\zeta, T) = (T-\zeta)^{-1} \tag{5.4}$$

を T の**レゾルベント** (resolvent)[3]と呼ぶ．スペクトル $\Sigma(T)$ の補集合（すなわち T のいかなる固有値とも異なる複素数すべての集合）を T の**レゾルベント集合** (resolvent set) と呼んで，これを $\mathrm{P}(T)$ と書き表わす．こうすれば，レゾルベント $R(\zeta)$ は $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ に対して定義されるのである．

問題 5.4.　$R(\zeta)$ は T と可換である．$(\lambda_h - \zeta)^{-1}$ なる数がちょうど $R(\zeta)$ の固有値になる．

問題 5.4a.　$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X},\mathsf{Y})$, $S \in \mathcal{B}(\mathsf{Y},\mathsf{X})$ とすれば，$ST \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ および $TS \in \mathcal{B}(\mathsf{Y})$ は同一のスペクトルを有する．ただしゼロが固有値となることがありうるが，それは除く．また $\zeta R(\zeta, ST) = -1_{\mathsf{X}} + SR(\zeta, TS)T$ が成り立つ．とくに $\mathsf{Y}=\mathsf{X}$ ならば，$\Sigma(ST)=\Sigma(TS)$．ここで 1_X は X における恒等作用素を表わしている．

レゾルベントの重要な性質は，それが（第一）**レゾルベント方程式** (resolvent equation) と呼ばれる次の関係を満たすことである．

$$R\,(\zeta_1) - R\,(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)\; R\,(\zeta_1)\; R\,(\zeta_2). \tag{5.5}$$

これは，左辺が $R(\zeta_1)(T-\zeta_2)R(\zeta_2) - R(\zeta_1)(T-\zeta_1)R(\zeta_2)$ に等しいことに注意すれば，容易に確かめることができる．とくに (5.5) によれば，$\boldsymbol{R(\zeta_1)}$

[3] レゾルベントは作用素値の函数 $\zeta \to R(\zeta)$ である．しかしながら，ある特定の ζ におけるこの函数の値 $R(\zeta)$ も通常はレゾルベントと呼ばれているように思われる．また $(T-\zeta)^{-1}$ のかわりに $(\zeta - T)^{-1}$ がレゾルベントと呼ばれることもある．本書では，われわれは Stone【1】の定義に従う．

と $R(\zeta_2)$ とが可換であることが導かれる．また $R(\zeta_1) = \left[1 - (\zeta_2 - \zeta_1)R(\zeta_1)\right]R(\zeta_2)$ が成り立つ．ノイマン級数についての結果により（例 4.5 を見よ），これから

$$R(\zeta) = \left[1 - (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta_0)\right]^{-1} R(\zeta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n\, R(\zeta_0)^{n+1} \tag{5.6}$$

なる展開が得られ，この級数は少なくともあるノルムについて

$$\left|\zeta - \zeta_0\right| < \left\|R(\zeta_0)\right\|^{-1} \tag{5.7}$$

が成り立つならば絶対収束する．(5.6) を**レゾルベントの第一ノイマン級数** (first Neumann series for the resolvent) と呼ぶことにしよう．

(5.6) からは，$R(\zeta)$ が ζ について正則で，右辺の如きテイラー級数をもつことが知られる[4]．したがって

$$\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n R(\zeta) = n!\, R(\zeta)^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.8}$$

である．例 4.9 によれば，(5.6) における級数の収束半径は $1/\mathrm{spr}\, R(\zeta_0)$ に等しい．それゆえ，この級数が収束するためには，

$$\left|\zeta - \zeta_0\right| < 1/\mathrm{spr}\, R(\zeta_0) = \left(\lim \left\|R(\zeta_0)^n\right\|^{1/n}\right)^{-1} \tag{5.9}$$

であることが必要十分である．

大きな $|\zeta|$ については，$R(\zeta)$ は

$$R(\zeta) = -\zeta^{-1} (1 - \zeta^{-1} T)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} T^n \tag{5.10}$$

なる展開をもち，これが収束するためには $|\zeta| > \mathrm{spr}\, T$ であることが必要十分である．このように $R(\zeta)$ は無限遠において正則である．

問題 5.5.　$|\zeta| > \|T\|$ に対して，

---

[4] これは作用値の函数への函数論の応用を示す一例である．Knopp【1】, p. 79 を見よ．

$$\|R(\zeta)\| \leqq \left(|\zeta| - \|T\|\right)^{-1}, \tag{5.11}$$

$$\|R(\zeta) + \zeta^{-1}\| \leqq |\zeta|^{-1}\left(|\zeta| - \|T\|\right)^{-1}\|T\|.$$

スペクトル $\Sigma(T)$ は決して空ではない，つまり T は少なくともひとつの固有値を有する．もしそうでないとすれば，$R(\zeta)$ は $\zeta \to \infty$ のとき $R(\zeta) \to 0$ を満たす整函数となるはずである．[(5.11) を見よ．] するとリューヴィルの定理[5]から $R(\zeta) = 0$ とならねばならない．しかしこれからは $1 = (T - \zeta)R(\zeta) = 0$ という矛盾が生ずる[6]．

T の各固有値は解析函数 $R(\zeta)$ の特異点[7]であることは容易にわかる．(5.10) の収束円[8] $|\zeta| = \mathrm{spr}\, T$ の上には，$R(\zeta)$ の特異点が少なくともひとつ存在するから，$\mathrm{spr}\, T$ は T の（絶対値において）最大の固有値と一致する．

$$\mathrm{spr}\, T = \max_h |\lambda_h|. \tag{5.12}$$

これにより再び，$\mathrm{spr}\, T$ がその定義に用いられるノルムから独立であることが示される．

問題 5.6. $\mathrm{spr}\, T = 0$ であるためには，T が巾零であることが必要十分である．[必要性についてのヒント：$\mathrm{spr}\, T = 0$ ならば，不変部分空間 M における T の部分 T_{M} のいずれに対しても $\mathrm{spr}\, T_{\mathsf{M}} = 0$ が成り立ち，したがって T_{M} は特異となる．このように各不変部分空間 $T^n\mathsf{X}$ における T の部分（問題 3.12 を見よ）は特異である．ゆえに $\mathsf{X} \supset T\mathsf{X} \supset T^2\mathsf{X} \supset \cdots$．ここですべての包含関係 $\supset$ は 0 に達するまで強い意味で成り立つ．]

3. レゾルベントの特異点

$R(\zeta)$ の特異点は，正確に T の固有値 λ_h, $h = 1, \ldots, s$ に等しい．$\zeta = \lambda_h$

---

[5] Knopp【1】, p. 113 を見よ．リューヴィルの定理から $R(\zeta)$ は定数であることが導かれ，$\zeta \to \infty$ のとき $R(\zeta) \to 0$ であるから，この定数は 0 である．

[6] $\dim \mathsf{X} > 0$ を仮定していることに注意．

[7] λ を解析函数 $R(\zeta)$ の正則点（除去可能な特異点）と想定する．このとき $\lim_{\zeta \to \lambda} R(\zeta) = R$ が存在し，したがって $(T - \lambda)R = \lim_{\zeta \to \lambda}(T - \zeta)R(\zeta) = 1$．このように $(T - \lambda)^{-1} = R$ が存在し，λ は固有値ではない．

[8] Knopp【1】, p. 101 を見よ．

における $R(\zeta)$ のローラン級数を考えてみよう[9]．簡単化のために，さしあたり $\lambda_h = 0$ を仮定し，

$$R(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta^n A_n \tag{5.13}$$

と書く．係数 A_n は

$$A_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-n-1} R(\zeta)\, d\zeta \tag{5.14}$$

で与えられ，Γ は $\zeta = 0$ を内に含んで，T の他の固有値は除外する，正の向きをもった小さな円である．Γ は (5.14) を変更することなく，いま少し大きな円 Γ' に拡大できるので，

$$A_n A_m = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'}\int_\Gamma \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} R(\zeta) R(\zeta')\, d\zeta\, d\zeta'$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma'}\int_\Gamma \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} \left[R(\zeta') - R(\zeta)\right] d\zeta\, d\zeta'$$

を得る．ここでレゾルベント方程式 (5.5) が利用されている．右辺の二重積分は任意の順序で計算してよい．Γ' が Γ の外側にあることを考慮すれば，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-n-1} (\zeta' - \zeta)^{-1}\, d\zeta = \eta_n \zeta'^{-n-1}, \tag{5.15}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1}\, d\zeta' = (1 - \eta_m)\, \zeta^{-m-1}$$

を得る．ここで η_n という記号は

$$n \geqq 0 \text{ に対しては } \eta_n = 1, \quad n < 0 \text{ に対しては } \eta_n = 0 \tag{5.16}$$

と定義される．こうすれば

$$A_n A_m = \frac{\eta_n + \eta_m - 1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta^{-n-m-2} R(\zeta)\, d\zeta \tag{5.17}$$

$$= (\eta_n + \eta_m - 1)\, A_{n+m+1}\,.$$

---

[9] Knopp【1】, p. 117 を見よ．

これから，$n = m = -1$ に対しては $A^2_{-1} = -A_{-1}$ を得る．このように $-A_{-1}$ は射影であるから，これを P と表記する．n, $m < 0$ に対しては，(5.17) から $A^2_{-2} = -A_{-3}$, $A_{-2}A_{-3} = A_{-4}, \ldots$ が導かれる．かくして $-A_{-2} = D$ とおけば，$k \geqq 2$ については $A_{-k} = -D^{k-1}$．同様に $n \geqq 0$ については $A_n = S^{n+1}$ を得るが，ここで $S = A_0$ である．

さて $\zeta = 0$ のかわりに $\zeta = \lambda_h$ が特異点となる一般の場合に戻ると，ローラン級数は次の形をとることが知られる．

$$(5.18) \qquad R(\zeta) = -(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h - \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} D_h^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^n S_h^{n+1}.$$

(5.17) において $n = -1$, $m = -2$ とおき，次に $n = -1$, $m = 0$ とおくと，

$$(5.19) \qquad P_h D_h = D_h P_h = D_h, \quad P_h S_h = S_h P_h = 0$$

を得る．したがって $\mathsf{M}_h = P_h\mathsf{X}$, $\mathsf{M}'_h = (1 - P_h)\mathsf{X}$ とすれば，(5.18) 右辺の二行にわたる式は，分解 $\mathsf{X} = \mathsf{M}_h \oplus \mathsf{M}'_h$ に従う作用素 $R(\zeta)$ の分解を表わしているのである．(5.18) の第一行は，孤立特異点におけるローラン級数の主部で，$\zeta - \lambda_h \neq 0$ に対して収束する．したがって $R(\zeta)$ の M_h における部分は唯一の特異点 $\zeta = \lambda_h$ を有し，D_h のスペクトル半径はゼロでなければならない．問題 5.6 によれば，D_h は巾零で，したがって

$$(5.20) \qquad D_h^{m_h} = 0, \quad m_h = \dim \mathsf{M}_h = \dim P_h$$

である（問題 3.10 を見よ）ことが導かれる．こうして $R(\zeta)$ のローラン展開 (5.18) の主部は有限で，$\zeta = \lambda_h$ は位数が m_h を超えない極 (pole) である．$R(\zeta)$ のすべての特異点 λ_h について同じことが成り立つから，$R(\zeta)$ は**有理型函数** (meromorphic function)[10]である．

相異なる h に対する P_h は次の関係を満たす．

---

[10] Knopp【2】, p. 34 を見よ．

$$(5.21) \qquad P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad \sum_{h=1}^{s} P_h = 1, \quad P_h T = T P_h .$$

第一の関係は，先に掲げた $P_h^2 = P_h$ の証明［(5.17) の特殊な場合］と同様の方法で示すことができる．そのためには，Γ_h を異なった h に対しては互いに外側に位置する円とするとき，

$$(5.22) \qquad P_h = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(\zeta)\, d\zeta$$

であることに注意すれば十分であろう．(5.21) の第二の等式は，T のすべての固有値を囲む大きな円に沿って $R(\zeta)$ を積分し，$R(\zeta)$ の無限遠における展開 (5.10) に注意することによって得られる．また P_h と T との可換性は，(5.22) からただちに導かれる．

$R(\zeta)$ は無限遠において有理型かつ正則であるから，$R(\zeta)$ を**部分分数** (partial fraction)[11]に分解すると，次の形になる．

$$(5.23) \quad R(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s}\left[(\zeta-\lambda_h)^{-1} P_h + \sum_{n=1}^{m_h-1}(\zeta-\lambda_h)^{-n-1} D_h^n\right].$$

問題 5.7. $\operatorname{spr} R(\zeta) = \left[\min_h |\zeta - \lambda_h|\right]^{-1} = \left[\operatorname{dist}\,(\zeta, \Sigma(T))\right]^{-1}$.

問題 5.8.

$(5.24) \qquad P_h D_k = D_k P_h = \delta_{hk} D_h\,, \quad h \neq k$ に対しては $D_h D_k = 0$.

問題 5.9. Γ をいかなる固有値 λ_h をも通らない，任意の単純な閉（求長可能）曲線で，正の向きをもつものとする．このとき

$$(5.25) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta)\, d\zeta = -\sum P_h .$$

ここで右辺の和は，λ_h が Γ の内側に位置するような h についてとるのである．

(5.14) の左または右から T を乗じ，$TR(\zeta) = R(\zeta)T = 1 + \zeta R(\zeta)$ に注意すると，$TA_n = A_n T = \delta_{n0} + A_{n-1}$ が得られる．これから，特異点が $\zeta = 0$ ではなく $\zeta = \lambda_h$ である場合，$n = 0$ および $n = -1$ については

[11] Knopp【1】, p. 34 を見よ．

$$(5.26)\qquad (T-\lambda_h)\,S_h = S_h\,(T-\lambda_h) = 1 - P_h\,,$$

$$P_h\,(T-\lambda_h) = (T-\lambda_h)\,P_h = D_h$$

が導かれる．

$h=1,\ldots,s$ のおのおのについて，ローラン展開 (5.18) の正則部分は，固有値 λ_h に関する T の**被約レゾルベント** (reduced resolvent) と称せられる．それを $S_h(\zeta)$ と表記しよう．すなわち

$$(5.27)\qquad S_h\,(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta-\lambda_h)^n\, S_h^{n+1}.$$

(5.19) および (5.26) から

$$(5.28)\qquad S_h = S_h\,(\lambda_h), \quad S_h\,(\zeta)\,P_h = P_h\,S_h\,(\zeta) = 0\,,$$

$$(5.29)\qquad (T-\zeta)\,S_h\,(\zeta) = S_h\,(\zeta)(T-\zeta) = 1 - P_h$$

が導かれる．最後の等式は $T-\zeta$ および $S_h(\zeta)$ それぞれの不変部分空間 $\mathsf{M}_h' = (1-P_h)\,\mathsf{X}$ における部分が，互いに逆となっていることを示している．

問題 5.10.　次の関係が成り立つ

$$(5.30)\qquad (T-\lambda_h)\,D_h^n = D_h^{n+1}, \quad n=1,2,\ldots\,.$$

$$(5.31)\qquad (T-\lambda_h)^{m_h}\,P_h = 0\,.$$

$$(5.32)\qquad S_h\,(\zeta) = -\sum_{k\neq h}\left[(\zeta-\lambda_k)^{-1}\,P_k + \sum_{n=1}^{m_k-1}(\zeta-\lambda_k)^{-n-1}\,D_k^n\right].$$

問題 5.11.　各 $S_h(\zeta)$ はレゾルベント方程式［(5.5) を見よ］と

$$(5.33)\qquad \left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n S_h\,(\zeta) = n!\,S_h\,(\zeta)^{n+1}, \quad n=1,2,\ldots$$

を満たす．

4. 作用素の標準形

前項の結果から，作用素 T の**標準形** (canonical form) が導かれる．先と同様に，射影 P_h, $h=1,\dots,s$ の像を M_h で表記すると，

$$\mathsf{X} = \mathsf{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_s \tag{5.34}$$

を得る．P_h と T とは互いに可換であるから，M_h は T の不変部分空間であり，また T は分解 (5.34) に従って分解される（§3.5 を見よ）．M_h は T の固有値 λ_h に対する**代数的固有空間** (algebraic eigenspace)（あるいは**主部分空間**，principal subspace）と呼ばれ，$m_h = \dim\ \mathsf{M}_h$ を λ_h の**代数的重複度** (algebraic multiplicity) と称する．以下，P_h を T の固有値 λ_h に対する**固有射影** (eigenprojection)，D_h を**固有巾零作用素** (eigennilpotent) と呼ぶことにする．M_h の任意のベクトル $u \neq 0$ を T の固有値 λ_h に対する**広義固有ベクトル** (generalized eigenvector)（あるいは**主ベクトル**，principal vector）と称する．

(5.26) から次の関係が導かれる．

$$T P_h = P_h T = P_h T P_h = \lambda_h P_h + D_h, \quad h=1,\dots,s. \tag{5.35}$$

このように T の不変部分空間 M_h における部分 T_{M_h} は，スカラー作用素 λ_h と巾零作用素 D_{h,M_h}，すなわち D_h の M_h における部分との和になっているのである．容易に知られるとおり，T_{M_h} はひとつ，そしてただひとつの固有値 λ_h を有する．

(5.35) の s 本の方程式を加えると，(5.21) により

$$T = S + D \tag{5.36}$$

が得られる．ここで

$$S = \sum_h \lambda_h P_h, \tag{5.37}$$

$$D = \sum_h D_h \tag{5.38}$$

である．$h \neq k$ に対しては $\lambda_h \neq \lambda_k$ でしかも P_h は (3.27–3.28) を満たすと

き，(5.37) の形式をもつ作用素 S は**対角化可能** (diagonalizable, diagonable あるいは**半単純**, semisimple) であると称する．S はスカラー作用素の直和（§3.5 を見よ）になっている．D は巾零である．なぜなら D は巾零作用素 D_h の直和であり，したがって $n \geqq \max m_h$ に対して $D^n = \sum D_h^n = 0$ となるからである．(5.24) から，D と S とが可換であることが知られる．

(5.36) は次のことを示している．つまり，**すべての作用素 $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ は，対角化可能な作用素 S およびそれと可換な巾零作用素 D の和として表現することができること**，これである．

T の固有値 λ_h は，それに対する固有巾零作用素 D_h がゼロであるとき**半単純** (semisimple) であるといい，また $m_h = 1$ であるとき**単純** (simple)[12]であるという（$m_h = 1$ から $D_h = 0$ が導かれることに注意しよう）．T が対角化可能であるためには，そのすべての固有値が半単純であることが必要十分である．そのすべての固有値が単純であるとき，T は**単純**であるという．そしてこの場合，T は N 個の固有値を有する．

(5.36) を T の**スペクトル表現** (spectral representation) と呼ぶ．スペクトル表現は次のような意味で一意的である．すなわち T が対角化可能な作用素 S および S と可換な巾零作用素 D との和であるならば，S と D とはそれぞれ (5.37), (5.38) によって与えられねばならないのである．これを示すにはまず，(5.37) の形をもつ対角化可能な作用素 S と可換な任意の作用素 R は，すべての P_h と可換であり，したがって M_h は R の下で不変であることに注意する．実際，$RS = SR$ の左側から P_h を乗じ，右側から P_k を乗ずると，$P_h P_k = \delta_{hk}$ であることにより，

$$\lambda_k P_h R P_k = \lambda_h P_h R P_k, \quad \text{すなわち} \quad h \neq k \text{ に対して } P_h R P_k = 0$$

を得る．h を固定し，すべての $k \neq h$ についてこの結果を加え合わせると，$P_h R(1 - P_h) = 0$ すなわち $P_h R = P_h R P_h$ となる．同様にして $R P_h = P_h R P_h$ を得，したがって $R P_h = P_h R$ となる．

さて

---

[12] 単純でない固有値は**退化的** (degenerate) であるといわれる．

$$T = S' + D', \quad S' = \sum_{h=1}^{s'} \lambda'_h P'_h, \quad D'S' = S'D'$$

を，(5.36) の形式における T のいまひとつの表現としてみよう．すぐ上で証明されたことから，$D'_h = P'_h D' = D' P'_h$ とするとき，$D' = \sum D'_h$ である．それゆえ $T - \zeta = \sum\left[(\lambda'_h - \zeta)P'_h + D'_h\right]$ であり，したがって

$$(5.39) \quad (T-\zeta)^{-1} = -\sum_{h=1}^{s'} \left[(\zeta - \lambda'_h)^{-1} P'_h + (\zeta - \lambda'_h)^{-2} D'_h + \cdots + (\zeta - \lambda'_h)^{-N} D'^{N-1}_h\right]$$

となる．これは上に示した $T-\zeta$ の表現を，(5.39) の左または右から乗ずることによって容易に確認することができる．(D' が巾零であるから，$D'^N_h = D'^N = 0$ であることに注意.) 作用素値の有理型函数を部分分数の和に分解する方法は一意的であるから（数値函数の場合と全く同様)，(5.39) と (5.23) とを比較することにより，s', λ'_h, P'_h, D'_h はそれぞれ s, λ_h, P_h, D_h と一致しなければならない．これでスペクトル表現の一意性の証明が完了するのである．

スペクトル表現 (5.36) から，T のジョルダンの標準形 (Jordan canonical form) が導かれる．これを示すために必要なのは，巾零作用素 D_h の構造を想起することだけである（§3.4 を見よ）．各 M_h に適当な基底を導入すると，D_h の M_h における部分 D_{h,M_h} は，(3.30) の形の行列によって表現される．こうして T_{M_h} は，すべての対角要素を λ_h で置き換えて得られる (3.30) の形の三角行列 $(\tau^{(h)}_{jk})$ によって表現される．$\mathsf{M}_1, \ldots, \mathsf{M}_s$ の基底を構成するすべての元を集めて X の基底をつくると，T の行列は小部分行列 $(\tau^{(h)}_{jk})$ の直和になる．とくに

$$(5.40) \qquad \det(T-\zeta) = \prod_{h=1}^{s} (\lambda_h - \zeta)^{m_h}, \quad \operatorname{tr} T = \sum_{h=1}^{s} m_h \lambda_h$$

が導かれる（問題 3.14 を見よ）．

T の各固有値 λ_h は m_h 回（m_h は λ_h の代数的重複度）繰り返して数え，そのうえで固有値を $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ と表記することがしばしば便利であ

る（たとえば $\mu_1 = \cdots = \mu_{m_1} = \lambda_1$, $\mu_{m_1+1} = \cdots = \mu_{m_1+m_2} = \lambda_2, \ldots$）．便宜上，$\mu_1, \ldots, \mu_N$ を T の**重複固有値** (repeated eigenvalue) と呼ぶことにしよう．こうすると，すべての作用素 $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ がちょうど N 個の重複固有値をもつわけである．(5.40) は次のように書き直すことができる．

$$\det(T-\zeta) = \prod_{k=1}^{N}(\mu_k - \zeta), \quad \operatorname{tr} T = \sum_{k=1}^{N} \mu_k . \tag{5.41}$$

問題 5.12.　固有値 λ_h に対する T の幾何的固有空間 N_h は，代数的固有空間 M_h の部分集合である．$\mathsf{N}_h = \mathsf{M}_h$ であるためには，λ_h が半単純であることが必要十分である．

問題 5.13.　λ_h が半単純であるためには，$\zeta = \lambda_h$ が $R(\zeta)$ の単純な極（位数 1 の極）であることが必要十分である．

問題 5.14.　m を T の固有値 0 の代数的重複度とする．n が十分に大（たとえば $n \geqq m$）ならば，rank T^n は $N - m$ に等しい．(0 が T の固有値でない場合は，$m = 0$ とおくのが約束である．§1.1 を見よ.)

問題 5.15.　次の関係が成り立つ．

$$|\operatorname{tr} T| \leqq (\operatorname{rank} T)\,\|T\| \leqq N\,\|T\| . \tag{5.42}$$

問題 5.16.　T の固有値 λ_h は次数 N の代数方程式（**特性方程式**，characteristic equation）

$$\det(T-\zeta) = 0 \tag{5.43}$$

の根と一致する．この方程式の根としての λ_h の重複度は，固有値 λ_h の代数的重複度に等しい．

(τ_{jk}) を $N \times N$ 型の行列とする．それは線形空間 X，たとえば N 次元数ベクトルの空間 C^N におけるある線形作用素 T の表現とみなすことができる．これは X の標準基底 $\{x_j\}$ に関する T の行列表現が (τ_{jk}) と一致することを意味する．(5.36) を T のスペクトル表現とし，また X の基底 $\{x'_j\}$ は，それに伴う T の行列 (τ'_{jk}) を標準形に転換するために，すぐ上の説明で用いられた X の基底としよう．

基底 $\{x_j\}$ と $\{x'_j\}$ との関係は (1.2) および (1.4) で与えられている．x'_k は T の広義の固有ベクトルであるから，数ベクトル $(\widehat{\gamma}_{1k}, \ldots, \widehat{\gamma}_{Nk})$, $k = 1, \ldots, N$

は行列 (τ_{jk}) の広義の固有ベクトルになる．行列 (τ_{jk}) と (τ'_{jk}) との関係は (3.8) で与えられている．このように (τ_{jk}) をより簡単な形式をもつ (τ'_{jk}) へ転換する操作が (τ_{jk}) の広義の固有ベクトルから構成される行列 $(\widehat{\gamma}_{jk})$ によって実現するわけで，それは $(\tau'_{jk}) = (\widehat{\gamma}_{jk})^{-1}(\tau_{jk})(\widehat{\gamma}_{jk})$ なる公式に従う．

固有値 λ_h が半単純であるならば，(τ'_{jk}) の第 h 番目の小部分行列は，すべての対角要素が λ_h に等しい対角行列である．T が対角化可能である場合は，(τ'_{jk}) 自体が対角行列で，対角要素は $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ であり，λ_h は m_h 回繰り返して現われる．(すなわち，μ_j を重複固有値とすれば，対角要素は $\mu_1, \ldots, \mu_N$ である.）この場合，$(\widehat{\gamma}_{1k}, \ldots, \widehat{\gamma}_{Nk})$, $k = 1, \ldots, N$ は本来の意味で (τ_{jk}) の固有ベクトルになっている．

問題 5.17. $(\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jN})$, $j = 1, \ldots, N$ は (τ_{jk}) の転置行列の広義の固有ベクトルである．

5. 随伴問題

$T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ ならば $T^* \in \mathcal{B}(\mathsf{X}^*)$ である．ふたつの作用素 T, T^* のスペクトル表現には単純な関係がある．(5.36) を T のスペクトル表現とすれば，T^* のスペクトル表現は

$$T^* = S^* + D^* = \sum_{h=1}^{s} (\overline{\lambda}_h P_h^* + D_h^*) \tag{5.44}$$

で与えられる．なぜなら P_h^* は P_h とともに (3.27–3.28) の関係を満たし，また D_h^* は P_h^* と相互に可換な巾零作用素であるからである（スペクトル表現の一意性に注意．第 4 項）．とくに，**T^* の固有値は T の固有値の共役複素数で，同一の代数的重複度をもつ** ことが導かれる．対応する幾何的重複度も相等しく，これは (3.40) の帰結である．

問題 5.18. $R^*(\zeta) = R(\zeta, T^*) = (T^* - \zeta)^{-1}$ は次の性質を有する．

$$R(\zeta)^* = R^*(\overline{\zeta}), \tag{5.45}$$

$$R^*(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s} \left[(\zeta - \overline{\lambda}_h)^{-1} P_h^* + \sum_{n=1}^{m_h - 1} (\zeta - \overline{\lambda}_h)^{-n-1} D_h^{*n} \right]. \tag{5.46}$$

6. 作用素の函数

$p(\zeta)$ を ζ についての多項式とするとき，任意の $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して作用素 $p(T)$ が定義される（§3.3 を見よ）．ここでレゾルベント $R(\zeta) = (T-\zeta)^{-1}$ を利用して，より一般的な種類の函数 $\phi(\zeta)$ に対して，T の函数 $\phi(T)$ を定義することができる．$\phi(\zeta) = (\zeta-\zeta_0)^{-1}$ に対しては，$R(\zeta_0)$ 自体が $\phi(T)$ に等しいことに注意しておかねばならない．

$\phi(\zeta)$ は T のすべての固有値 λ_h を含む複素平面の領域 Δ において正則とし，また $\Gamma \subset \Delta$ はすべての λ_h をその内部に囲む，正の向きをもった，滑かな単純閉曲線とする．このとき $\phi(T)$ は**ダンフォード=テイラー積分** (Dunford-Taylor integral) により，次のように定義される．

$$(5.47)\quad \phi(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \phi(\zeta)\, R(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \phi(\zeta)(\zeta - T)^{-1}\, d\zeta.$$

これは函数論におけるコーシーの積分公式[13]の類似である．より一般にこの公式は，Γ がいくつかの単純閉曲線 Γ_k から成り，Γ_k の内部 Δ'_k の合併が T のすべての固有値を含むような場合にも成り立つ．Γ がこれらの条件を満たす限り，(5.47) は Γ の選び方にはよらないことに注意しよう．

$\phi(\zeta)$ が多項式のときには，(5.47) が (3.18) と合致することは簡単に確かめることができる．単項式 $\phi(\zeta) = \zeta^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ についてこれを検証しておけば十分であろう．まず $n = 0$ の場合の証明は (5.25) に含まれている．$n \geqq 1$ については，$\zeta^n = (\zeta - T + T)^n = (\zeta - T)^n + \cdots + T^n$ と書いて，これを (5.47) に代入せよ．積分の結果，コーシーの定理により，最後の項を除くすべての項は消えてしまい，最後の項が T^n を与えるのである．

問題 5.19. $\phi(\zeta) = \sum \alpha_n \zeta^n$ が整函数ならば，$\phi(T) = \sum \alpha_n T^n$ である．

対応 $\phi(\zeta) \to \phi(T)$ は，Δ 上の正則函数が作る代数から代数 $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ への準同型である．すなわち

$$(5.48)\qquad \phi(\zeta) = \alpha_1\, \phi_1(\zeta) + \alpha_2\, \phi_2(\zeta)$$

---

[13] Knopp【1】, p. 61 を見よ．

$$\text{ならば}\quad \phi(T) = \alpha_1\,\phi_1(T) + \alpha_2\,\phi_2(T)\,,$$

(5.49)
$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta)\,\phi_2(\zeta)$$
$$\text{ならば}\quad \phi(T) = \phi_1(T)\,\phi_2(T)\,.$$

これから，(5.47) によって定義される作用素を $\phi(T)$ という記号で表わすことが正当化されるのである．(5.48) の証明は自明であろう．(5.49) については，$n, m < 0$（したがって $\eta_n + \eta_m - 1 = 1$）に対する (5.17) の証明と全く同様に証明できることを注意しておけば十分であろう．実際，(5.17) は $\phi_1(\zeta) = \zeta^{-n-1}$, $\phi_2(\zeta) = \zeta^{-m-1}$ とした (5.49) の特別な場合なのである．

(5.23) を (5.47) に代入すると，$\phi(T)$ のスペクトル表現が得られる．$T = \sum(\lambda_h P_h + D_h)$ を T のスペクトル表現とすれば，その結果は

(5.50)
$$\phi(T) = \sum_{h=1}^{s} \left[\phi(\lambda_h)\,P_h + D'_h\right]$$

となる．ここで[14]

(5.51)
$$D'_h = \phi'(\lambda_h)\,D_h + \cdots + \frac{\phi^{(m_h-1)}(\lambda_h)}{(m_h-1)!}\;D_h^{m_h-1}$$

である．D'_h は相互に，また P_k とも可換な巾零作用素であるから，スペクトル表現の一意性により，(5.50) が $\phi(T)$ のスペクトル表現であることがわかる．

このように $\phi(T)$ は T と同一の固有射影 P_h をもち，また $\phi(T)$ の固有値は $\phi(\lambda_h)$ で，重複度は m_h である．ただし厳密にいえば，これらの命題が正しいのは，$\phi(\lambda_h)$ が相互に異なる場合に限る．たとえば $\phi(\lambda_1) = \phi(\lambda_2)$ であれば，$\phi(\lambda_1)$ は $\phi(T)$ の固有値で，固有射影は $P_1 + P_2$，重複度は $m_1 + m_2$ であるといわねばならない．

$\phi(\lambda_h)$ がちょうど $\phi(T)$ の固有値になっているという主張は，いわゆる**スペクトル写像定理** (spectral mapping theorem) の特別な場合である．

---

[14] λ が Γ の内側にあるならば，$(2\pi i)^{-1}\int_\Gamma(\zeta-\lambda)^{-n-1}\phi(\zeta)d\zeta = \phi^{(n)}(\lambda)/n!$ であることに注意しよう．

(5.48), (5.49) に加えて，次のようなもうひとつの函数関係を補っておかねばならない．

$$\phi(\zeta)=\phi_1\big(\phi_2(\zeta)\big) \quad \text{ならば} \quad \phi(T)=\phi_1\big(\phi_2(T)\big). \tag{5.52}$$

ここで ϕ_1 は $S=\phi_2(T)$ のすべての固有値 $\phi_2(\lambda_h)$ を含む領域 Δ_1 において正則であり，他方 ϕ_2 は先に述べたような領域 Δ_2 において正則であることが仮定されている．この事実により，$\phi_1(S)$ を

$$\phi_1(S)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\phi_1(z)(z-S)^{-1}\,dz \tag{5.53}$$

として構成しうることが保証される．ここで Γ_1 は S の固有値 $\phi_2(\lambda_h)$ を囲む曲線（あるいは複数の曲線の合併）である．しかし $z\in\Gamma_1$ に対しては

$$\begin{aligned}(z-S)^{-1}&=\big(z-\phi_2(T)\big)^{-1}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\big(z-\phi_2(\zeta)\big)^{-1}(\zeta-T)^{-1}\,d\zeta\end{aligned} \tag{5.54}$$

が成り立つ．これは (5.49) と，すべての λ_h を含む Δ_2 の適当な部分領域において，$z-\phi_2(\zeta)$ および $(z-\phi_2(\zeta))^{-1}$ の双方が ζ の正則函数であるという事実から導かれる．(曲線 Γ_2 は，ϕ_2 による Γ_2 の像が Γ_1 の内側に位置するような部分領域の中にとらねばならない.) そこで (5.54) を (5.53) に代入すれば，

$$\begin{aligned}\phi_1(S)&=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\phi_1(z)\big(z-\phi_2(\zeta)\big)^{-1}(\zeta-T)^{-1}\,d\zeta\,dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\phi_1\big(\phi_2(\zeta)\big)(\zeta-T)^{-1}\,d\zeta=\phi(T)\end{aligned} \tag{5.55}$$

となり，これで示すべき結果が得られたのである．

例 5.20. ダンフォード積分の応用として，作用素 $T\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ の対数函数

$$S=\log T \tag{5.56}$$

を，T が非特異であることを仮定して定義しよう．Δ は複素平面の単連結な領域で，T のすべての固有値 λ_h を含むが 0 は含まないものとしよう．また Γ はすべ

ての λ_h を囲む Δ における単純閉曲線とする．$\phi(\zeta)=\log\zeta$ は，Δ 上の正則な函数として定義されうるから，(5.47) を適用して函数

$$S=\log T=\phi(T)=-\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \log\zeta\, R(\zeta)\, d\zeta \tag{5.57}$$

が定義される．$\exp(\log\zeta)=\zeta$ であるから，(5.52) により

$$\exp(\log T)=T. \tag{5.58}$$

領域 Δ および函数 $\phi(\zeta)=\log\zeta$ の選択が一意的ではないことに注意しなければならない．それゆえ，上記の性質を有する異なった作用素 $\log T$ が存在するのである．とくに，ある選択に基づく $\log T$ の各固有値が，異なった選択に基づく固有値と $2\pi i$ の整数倍だけ異なる可能性がある．λ_h の代数的重複度を m_h とすれば，次の関係が導かれる．

$$\mathrm{tr}\,(\log T)=\sum m_h\log\lambda_h+2n\pi i,\quad n=\text{整数}, \tag{5.59}$$

$$\exp\big(\mathrm{tr}\,(\log T)\big)=\prod\lambda_h^{m_h}=\det T. \tag{5.60}$$

7. 相似変換

U は線形空間 X からいまひとつの線形空間 X' への作用素で，$U^{-1}\in\mathcal{B}(\mathsf{X}',\mathsf{X})$ が存在するものとしよう．(これから $\dim\mathsf{X}=\dim\mathsf{X}'$ が導かれる．) 作用素 $T\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して，

$$T'=UTU^{-1} \tag{5.61}$$

によって定義される作用素 $T'\in\mathcal{B}(\mathsf{X}')$ は，U による**変換** (transformation) を T に施して得られる作用素と称せられる．また T' は T と**相似** (similar)[15]であるという．一対一の対応 $u\to u'=Uu$ は，$Tu\to T'u'=UTu$ が成り立つという意味において不変であるから，T' は T と同一の内的構造を有する．X および X' それぞれの基底 $\{x_j\}$, $\{x'_j\}$ を $x'_j=Ux_j$ のように選ぶと，T および T' は同一の行列によって表現される．

いま

$$T=\sum(\lambda_h P_h+D_h) \tag{5.62}$$

---

[15] §4.6 において，互いに相似な作用素の組の事例を考察した．

を T のスペクトル表現とすると，

(5.63) $T' = \sum(\lambda_h P'_h + D'_h),\ P'_h = U P_h U^{-1},\ D'_h = U D_h U^{-1}$

が T' のスペクトル表現となる．

§ 6. ユニタリ空間の作用素

1. ユニタリ空間

これまでのところ，われわれは特殊な仮定は何も導入することなく，一般的な作用素を取り扱ってきた．しかし応用上は，エルミット作用素あるいは正規作用素にかかわることがしばしば生ずる．そのような概念は，任意のふたつのベクトル u, v に対して**内積** (inner product) (u, v) が定まった**ユニタリ空間** (unitary space) と呼ばれる特別な種類のノルム空間 H においてはじめて定義されるものである．これらの概念が，とりわけ固有値問題についてわれわれが得た一般的結果に何をつけ加えるか，本節ではこれを見てゆこう．$0 < \dim \mathsf{H} < \infty$ を仮定する．

内積 (u, v) は複素数値で（エルミット）対称的，すなわち

(6.1) $$\overline{(u, v)} = (v, u),$$

を満たし，しかも**半双線形** (sesquilinear)，すなわち u について線形で v について半線形である．(6.1) から，(u, u) は必ず実数であることがわかる．さらに正値定符号性，つまり

(6.2) $$u \neq 0 \quad に対しては \quad (u, u) > 0^1$$

を仮定する．内積 (u, v) はある線形空間の元と，その随伴空間の元との間に定義されるスカラー積の特別な場合とみなすことができ，それはやがてすぐに了解されるであろう．この理由により，これらふたつの量に対して同じ記号 (u, v) を使うことが正当化されるのである．

---

[1] 任意の有限次元空間 X において，正値定符号で半双線形な形式を導入し，X をユニタリ空間とすることができる．

ユニタリ空間 H は線形空間であるから，H には異なったノルムを定義することもできよう．しかし H には内積を用いて定義される特別のノルム（**ユニタリ・ノルム**，unitary norm）があって，本書でユニタリ空間のノルムについて語るときにはいつでもこのノルムを意味するものとする．[もちろん可能な他のいかなるノルムも，この特別なノルムと同等である．(1.20) を見よ.] ユニタリ・ノルムは

(6.3) $$\|u\| = (u, u)^{1/2}$$

によって与えられる．ノルムについての条件 (1.18) のうち，はじめのふたつが満たされることは自明であろう．第三の条件（三角不等式）を確かめる前に，次の**シュヴァルツの不等式** (Schwarz inequality) に注意しておく．

(6.4) $$|(u, v)| \leqq \|u\| \; \|v\| .$$

ここで等号が成り立つのは，u と v とが一次従属な場合かつその場合に限る．たとえば (6.4) は

(6.5) $$\big\| \|v\|^2 u - (u, v)\, v \big\|^2 = \big(\|u\|^2 \|v\|^2 - |(u, v)|^2\big) \|v\|^2$$

なる等式から導かれる．三角不等式は (6.4) の帰結であって，次のように確かめられる．$\|u + v\|^2 = (u + v, u + v) = \|u\|^2 + 2 \text{ Re } (u, v) + \|v\|^2 \leqq \|u\|^2 + 2\|u\| \; \|v\| + \|v\|^2 = \big(\|u\| + \|v\|\big)^2$.

例 6.1. 数ベクトル $u = (\xi_1, \dots, \xi_N)$, $v = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ に対して

(6.6) $$(u, v) = \sum \xi_j \, \overline{\eta}_j , \quad \|u\|^2 = \sum |\xi_j|^2$$

とおく．この内積により，N 次元数ベクトル空間 C^N はユニタリ空間となる．

問題 6.2. ユニタリ・ノルムは次の特徴的な性質を持つ．

(6.7) $$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2 \|u\|^2 + 2 \|v\|^2.$$

問題 6.3. 内積 (u, v) はノルムを用いて次のように表現することができる．

(6.8) $$(u, v) = \frac{1}{4}\big(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i \|u + i v\|^2 - i \|u - i v\|^2\big).$$

問題 6.4. 数ベクトルの組 (ξ_j), (η_j) について

(6.9) $$\Big| \sum \xi_j \, \eta_j \Big| \leqq \Big(\sum |\xi_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum |\eta_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\left(\sum |\xi_j+\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\sum |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum |\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

2.　随伴空間

ユニタリ空間 H の際立った性質は，その随伴空間 H* を H 自体と同一視しうること，すなわち H* = H の成り立つことである.

任意の $u \in \mathsf{H}$ に対して $f_u[v] = (u, v)$ とおく．すると f_u は H 上の半線形形式であり，したがって $f_u \in \mathsf{H}^*$．$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ ならば $f_u[v] = (u, v) = \alpha_1(u_1, v) + \alpha_2(u_2, v) = \alpha_1 f_{u_1}[v] + \alpha_2 f_{u_2}[v]$ であるから，$f_u = \alpha_1 f_{u_1} + \alpha_2 f_{u_2}$．したがって写像 $u \to f_u$ は線形である．このように $u \to f_u = Tu$ は H から H* への線形作用素を定義するのである.

T は等長，すなわち $\|Tu\| = \|u\|$ である．実際，(2.22) により，$\|Tu\| = \|f_u\| = \sup_v |(u, v)| / \|v\| = \|u\|$ ［シュヴァルツの不等式と $(u, u) = \|u\|^2$ に注意せよ］．とくに，T は一対一である．$\dim \mathsf{H}^* = \dim \mathsf{H}$ であるから，T は H を H* 全体の上へ等長に写す．これはすべての $f \in \mathsf{H}^*$ が，$\|f\| = \|u\|$ を満たし一意的に定まる $u \in \mathsf{H}$ について，f_u の形式を有することを意味する．f とこの u とを同一視するのは自然な考え方であろう．H* と H とを同一視するというのは，この意味においてである.

$(u, v) = f[v] = (f, v)$ であるから，内積 (u, v) はスカラー積 (f, v) と一致することがわかる.

こう考えれば，スカラー積について定義されたさまざまな概念を，内積の場合にも移しかえることができる（§2.2 を見よ）．$(u, v) = 0$ であるならば，これを $u \perp v$ と書き，u と v とは互いに**直交** (orthogonal あるいは perpendicular) するという．S を H の部分集合とし，すべての $v \in \mathsf{S}$ について $u \perp v$ ならば，u は S に直交するといって，$u \perp \mathsf{S}$ なる記号で表わす．$u \perp \mathsf{S}$ を満たすすべての $u \in \mathsf{H}$ の集合は S の零化集合であり，これを $\mathsf{S}^\perp$ と表記する．S, S′ を H のふたつの部分集合とし，すべての $u \in \mathsf{S}$ とすべての $v \in \mathsf{S}'$ とが直交するとき，S と S′ とは**直交**するといい，記号的には $\mathsf{S} \perp \mathsf{S}'$ で表わす.

問題 6.5. (u, v) は u, v についての連続函数である.

問題 6.6. ピタゴラスの定理：

$$u \perp v \quad \text{ならば} \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \tag{6.10}$$

問題 6.7. M を S の線形包とするとき，$u \perp \mathsf{S}$ ならば $u \perp \mathsf{M}$. $\mathsf{S}^\perp$ は線形多様体で，しかも $\mathsf{S}^\perp = \mathsf{M}^\perp$.

ふたつのユニタリ空間 H, H' を考えよう．$u \in \mathsf{H}$, $u' \in \mathsf{H}'$ に対して定義される複素数値函数 $\mathfrak{t}[u, u']$ は，それが u について線形であり，u' について半線形であるとき，**半双線形形式** (sesquilinear form) であるという．とくに $\mathsf{H}' = \mathsf{H}$ の場合には，H 上の半双線形形式という．H の内積は，H 上の半双線形形式の一特殊事例である．H 上の一般の半双線形形式 $\mathfrak{t}[u, v]$ については，$\mathfrak{t}[u, v]$ と $\mathfrak{t}[v, u]$ とは無関係であり，したがって**二次形式** (quadratic form) $\mathfrak{t}[u] \equiv \mathfrak{t}[u, u]$ が実数値になるとは限らない．しかしいずれの場合も (6.8) に似た次の関係（**極化の原理**，polarization principle）が成り立つ．すなわち

$$\mathfrak{t}[u, v] = \frac{1}{4}\big(\mathfrak{t}[u+v] - \mathfrak{t}[u-v] + i\,\mathfrak{t}[u+i\,v] - i\,\mathfrak{t}[u-i\,v]\big). \tag{6.11}$$

かくして半双線形形式 $\mathfrak{t}[u, v]$ は，それに伴う二次形式 $\mathfrak{t}[u]$ によって決まるのである．とくに $\mathfrak{t}[u] = 0$ が恒等的に成り立つならば，恒等的に $\mathfrak{t}[u, v] = 0$ である．$\mathfrak{t}[u, v]$ を $\mathfrak{t}[u]$ の**極化形式** (polar form) と呼ぶ．

問題 6.8. すべての $u \in \mathsf{H}$ に対して $|\mathfrak{t}[u]| \leqq M\|u\|^2$ ならば，$|\mathfrak{t}[u, v]| \leqq 2M\|u\|\,\|v\|$ である.

問題 6.9. T を H から H' への線形作用素とするならば，$\|Tu\|^2$ は H 上の二次形式で，その極化形式は (Tu, Tv) となる.

注意 6.10. (6.11) の成立はスカラー i の介在に密接にかかわっている．実線形空間においては，二次形式 $\mathfrak{t}[u]$ は $\mathfrak{t}[u, v]$ を決定しない.

3. 正規直交系

ベクトル $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{H}$ の族のうち，任意のふたつの元が直交するとき，この族は**直交系** (orthogonal family) であるという．これに加えて，各ベク

トルが正規化されているとき，つまり

$$(x_j, x_k) = \delta_{jk} \tag{6.12}$$

が成り立つとき，このベクトルの族は**正規直交系** (orthonormal family) であるという．容易に知られるとおり，正規直交系を形づくるベクトルは一次独立である．正規直交系 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ は $n = N = \dim \mathsf{H}$ であるとき，**完備** (complete) であるという．この場合には正規直交系は H の基底となり，それを**正規直交基底** (orthonormal basis) と称する．

M を正規直交系 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ の線形包としよう．任意の $u \in \mathsf{H}$ に対して，ベクトル

$$u' = \sum_{j=1}^{n} (u, x_j)\, x_j \tag{6.13}$$

は，$u' \in \mathsf{M}$, $u - u' \in \mathsf{M}^{\perp}$ なる性質を有する．u' を u の M への**直交射影** (orthogonal projection)（あるいは単に**射影**，projection ）と呼ぶ．ピタゴラスの定理 (6.10) により，

$$\|u\|^2 = \|u'\|^2 + \|u - u'\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(u, x_j)|^2 + \|u - u'\|^2 \tag{6.14}$$

が成り立ち，したがって

$$\sum_{j=1}^{n} |(u, x_j)|^2 \leqq \|u\|^2 \tag{6.15}$$

（**ベッセルの不等式**，Bessel's inequality）

である．

$u_1, \ldots, u_n$ を任意の一次独立なベクトルとするとき，正規直交系 $x_1, \ldots, x_n$ を構成し，各 $k = 1, \ldots, n$ について k 個のベクトル $x_1, \ldots, x_k$ と，k 個のベクトル $u_1, \ldots, u_k$ とが同一の線形多様体を張るようにすることができる．これは k についての帰納法によって証明される．まず $x_1, \ldots, x_{k-1}$ が構成されたとしてみよう．M_{k-1} が $x_1, \ldots, x_{k-1}$ の線形包を表わすものとすれば，仮定により，M_{k-1} は $u_1, \ldots, u_{k-1}$ の線形包に一致する．u_k の M_{k-1} への

射影を u'_k とし，$u''_k = u_k - u'_k$ とおく（$k=1$ については $u''_1 = u_1$ とする）．u_j の一次独立性により，$u''_k \neq 0$，そこで $x_k = \|u''_k\|^{-1} u''_k$ とおく．こうするとベクトル $x_1, \ldots, x_k$ が所望の条件を満たしているのである．ここに述べた構成法を**シュミットの直交化過程** (Schmidt orthogonalization process) と呼んでいる．

H のいかなる線形多様体 M も基底 $\{u_j\}$ をもつのであるから，M には正規直交基底 $\{x_j\}$ が存在する．とくに H には完備な正規直交系が存在する．そして $\|x_1\| = 1$ を満たす任意のベクトル x_1 が，H の正規直交基底の最初の元となりうるのである．

また任意の $u \in \mathsf{H}$ は，与えられた線形多様体 M への直交射影 u' をもつことが導かれる．u' は $u' \in \mathsf{M}$ かつ $u'' = u - u' \in \mathsf{M}^\perp$ という性質により，一意的に決定される．このように H は M と $\mathsf{M}^\perp$ の直和である．すなわち

$$\mathsf{H} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{M}^\perp. \tag{6.16}$$

この意味において，$\mathsf{M}^\perp$ は M の**直交補空間** (orthogonal complement) と呼ばれる．これについては

$$\mathsf{M}^{\perp\perp} = \mathsf{M}, \quad \dim \mathsf{M}^\perp = N - \dim \mathsf{M} \tag{6.17}$$

が成り立つ．$\mathsf{N} \subset \mathsf{M}$ のときには，$\mathsf{M} \cap \mathsf{N}^\perp$ を $\mathsf{M} \ominus \mathsf{N}$ とも表記する．それは $u \perp \mathsf{N}$ を満たす，すべての $u \in \mathsf{M}$ の集合である．

$\mathsf{M} = \mathsf{H}$ なる特別の場合は，$\mathsf{M}^\perp = 0$ であり，したがって $u'' = 0$ である．こうして (6.13) から

$$u = \sum_{j=1}^{N} (u, x_j)\, x_j \tag{6.18}$$

を得る．これが u の，正規直交基底 $\{x_j\}$ による**展開** (expansion) である．(6.18) に右から v を乗ずると，

$$(u, v) = \sum_j (u, x_j)(x_j, v) = \sum_j (u, x_j)\overline{(v, x_j)}. \tag{6.19}$$

とくに

(6.20)
$$\|u\|^2 = \sum_j |(u, x_j)|^2$$
（パーセヴァルの等式，Parseval's equality）

である．

次の補題は後に必要となる．

補題 6.11. M, M′ は H におけるふたつの線形多様体で，次元はそれぞれ n, n' とする．このとき $\dim(\mathsf{M}' \cap \mathsf{M}^\perp) \geqq n' - n$.

これは $\dim \mathsf{M}' = n'$, $\dim \mathsf{M}^\perp = N - n$, $\dim(\mathsf{M}' + \mathsf{M}^\perp) \leqq N$ という関係を考慮すると，(1.10) から導かれる．

$\{x_j\}$ を H の（必ずしも正規直交でない）基底とする．随伴基底 $\{e_j\}$ は

(6.21)
$$(e_j, x_k) = \delta_{jk}$$

なる関係を満たす，$\mathsf{H}^* = \mathsf{H}$ の基底である（§2.3 を見よ）．$\{x_j\}$, $\{e_j\}$ は H の元の**双直交系** (biorthogonal family) を形づくるともいわれる．基底 $\{x_j\}$ は，$e_j = x_j$, $j = 1, \ldots, N$ のとき**自己随伴** (selfadjoint) である．かくして **H の基底が自己随伴であるためには，それが正規直交系を成すことが必要十分である．**

4. 線形作用素

あるユニタリ空間 H からいまひとつのユニタリ空間 H′ への線形作用素 T を考える．T のノルムは $\|T\| = \sup \|Tu\| / \|u\| = \sup |(Tu, u')| / \|u\| \, \|u'\|$ によって定義されることを想起しよう［(4.1), (4.2) を見よ］．

函数

(6.22)
$$\mathfrak{t}[u, u'] = (T u, u')$$

は H × H′ 上の半双線形形式である．逆に H × H′ 上の任意の半双線形形式 $\mathfrak{t}[u, u']$ は，H から H′ への作用素 T を適当に選ぶことにより，この形式で表現することができる．$\mathfrak{t}[u, u']$ は u を固定したとき H′ 上で半線形であるから，すべての $u' \in \mathsf{H}'$ に対して，$\mathfrak{t}[u, u'] = (w', u')$ を満たす $w' \in \mathsf{H}'$ が一意的に定まる．w' は u によって決定されるのであるから，$w' = Tu$ とおく

ことによって，函数 T を定義することができる．T が H から H' への線形作用素であることは容易に知られる．とくに $\mathfrak{t}$ が $\mathsf{H}(\mathsf{H}' = \mathsf{H})$ 上の半双線形形式である場合は，T は H からそれ自身への線形作用素である．

同様にして，$\mathfrak{t}[u, u']$ は

$$\mathfrak{t}[u, u'] = (u, T^* u') \tag{6.23}$$

という形でも表現することができる．ここで T^* は H' から H への線形作用素で，これを T の**随伴作用素** (adjoint operator) と称する．H^*, H'^* をそれぞれ H, H' と同一視することにより，T^* は §3.6 で定義した随伴作用素と合致する．

$T^* T$ は H から H 自身への線形作用素である．

$$(u, T^*T v) = (T^*T u, v) = (T u, T v) \tag{6.24}$$

なる関係から，$T^* T$ は H 上の半双線形形式 (Tu, Tv) に随伴する作用素であることがわかる．(6.24) のはじめのふたつの項は H における内積であり，他方，最後の項は H' における内積である．(6.24) および (4.2) から，$\|T^* T\| = \sup |(Tu, Tv)| / \|u\| \, \|v\| \geqq \sup \|Tu\|^2 / \|u\|^2 = \|T\|^2$ であることが導かれる．一方，$\|T^* T\| \leqq \|T^*\| \, \|T\| = \|T\|^2$ であるから，

$$\|T^*T\| = \|T\|^2. \tag{6.25}$$

とくに $T^* T = 0$ からは $T = 0$ が導かれる．

問題 6.12. $\mathsf{N}(T^* T) = \mathsf{N}(T)$.

問題 6.13. H から H への作用素 T については，極化の原理

$$(T u, v) = \frac{1}{4} \Big[\big(T (u + v), u + v\big) - \big(T (u - v), u - v\big) + i \big(T (u + i v), u + i v\big) - i \big(T (u - i v), u - i v\big) \Big] \tag{6.26}$$

が成り立つ．

問題 6.14. T が H からそれ自身への作用素とするとき，すべての u について $(Tu, u) = 0$ が成り立つならば，$T = 0$ である．

作用素の行列表現は，定義域および値域における随伴基底の組に関係して

定まる［(3.10) を見よ］．これから，ユニタリ空間の間で定義される作用素の行列表現を得るためには，自己随伴的な（正規直交）基底を選ぶことの便宜が示唆される．

T をユニタリ空間 H からいまひとつのユニタリ空間 H′ への作用素とし，$\{x_k\}$ および $\{x'_j\}$ はそれぞれ H, H′ の直交基底とする．このとき，これらの基底に関する T の行列表現の要素は，$f_j = x'_j$ とおいて (3.10) からわかるとおり，

$$\tau_{jk} = (T\,x_k, x'_j) = (x_k, T^*\,x'_j) \tag{6.27}$$

である．より直接には，(6.27) は次の展開からも求められる．

$$T\,x_k = \sum_j\,(T\,x_k, x'_j)\,x'_j\,. \tag{6.28}$$

$\mathsf{H}' = \mathsf{H}$ の場合は，$x'_j = x_j$ とするのが約束であることを思い出しておこう．

問題 6.15.　$\{x_k\}$ が H の直交基底で，T を H からそれ自身への作用素とすれば，

$$\operatorname{tr} T = \sum_k\,(T\,x_k, x_k)\,. \tag{6.29}$$

同じ基底の組 $\{x'_j\}$, $\{x_k\}$ に関する T^* の行列表現は，$\tau^*_{kj} = (T^*\,x'_j, x_k)$ によって与えられる．(6.27) と比較すれば，

$$\tau^*_{kj} = \overline{\tau_{jk}} \tag{6.30}$$

である．こうして（同一の直交基底の組に関する）T および T^* の行列表現は互いにエルミット共役となっているのである．

5.　対称汎函数と対称作用素

ユニタリ空間 H 上の半双線形形式 $\mathfrak{t}[u,v]$ が

$$\text{すべての}\quad u, v \in \mathsf{H}\quad\text{について}\quad \mathfrak{t}[v,u] = \overline{\mathfrak{t}[u,v]} \tag{6.31}$$

なる条件を満たすとき，$\mathfrak{t}[u,v]$ は**対称的** (symmetric) であるという．$\mathfrak{t}[u,v]$ が対称的であるとき，それに伴う二次形式 $\mathfrak{t}[u]$ は実数値となる．(6.11) から

知られるとおり，その逆もまた成り立つ．

対称的半双線形形式（あるいはそれに伴う二次形式）$\mathfrak{t}$ が，すべての u について $\mathfrak{t}[u] \geqq 0$ を満たすならば，$\mathfrak{t}$ は**非負** (nonnegative) であるといい（記号 $\mathfrak{t} \geqq 0$ で表わす），また $u \neq 0$ に対して $\mathfrak{t}[u] > 0$ ならば，$\mathfrak{t}$ は**正** (positive) であると称する．任意の非負汎函数に対しては，内積（それは特別な正の半双線形形式である）の場合と同様，シュヴァルツの不等式と三角不等式が成り立つ．すなわち

$$(6.32) \qquad \left|\mathfrak{t}[u,v]\right| \leqq \mathfrak{t}[u]^{1/2}\,\mathfrak{t}[v]^{1/2} \leqq \frac{1}{2}\left(\mathfrak{t}[u] + \mathfrak{t}[v]\right),$$

$$\mathfrak{t}[u+v]^{1/2} \leqq \mathfrak{t}[u]^{1/2} + \mathfrak{t}[v]^{1/2},$$

$$\mathfrak{t}[u+v] \leqq 2\,\mathfrak{t}[u] + 2\,\mathfrak{t}[v].$$

内積について類似の不等式を証明するためには，狭義の正値性は用いなかったことに注意しよう．

対称的形式 $\mathfrak{t}$ に対して，$\mathfrak{t}[u] \geqq \gamma\|u\|^2$ を成り立たしめる最大の実数 γ のことを $\mathfrak{t}$ の**下限** (lower bound) と呼ぶ．$\mathfrak{t}$ の**上限** (upper bound) γ' も同じように定義する．このとき

$$(6.33) \qquad \left|\mathfrak{t}[u,v]\right| \leqq M\,\|u\|\,\|v\|, \quad M = \max\left(|\gamma|, |\gamma'|\right)$$

が成り立つ．これを示すためには，いま考えている $\mathfrak{t}[u,v]$ の値が実数であることを仮定してよい．なぜなら，(6.33) は u に絶対値が 1 のスカラーを乗じても変わらないからである．$\mathfrak{t}[u]$ は実数値であるから，(6.11) により，$\mathfrak{t}[u,v] = 4^{-1}(\mathfrak{t}[u+v] - \mathfrak{t}[u-v])$ である．またすべての u について $\left|\mathfrak{t}[u]\right| \leqq M\|u\|^2$ であるから，$\left|\mathfrak{t}[u,v]\right| \leqq 4^{-1}M(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2) = 2^{-1}M(\|u\|^2 + \|v\|^2)$．$u, v$ を $\alpha^2 = \|v\| / \|u\|$ としたうえで，それぞれ αu, v/α で置き換えれば，(6.33) が導かれるのである．

(6.22) により，対称的形式 $\mathfrak{t}[u,v]$ に対応して定義される作用素 T は，(6.22), (6.23), (6.31) により

$$(6.34) \qquad T^* = T$$

なる性質を有する．H から H 自身への作用素 T で (6.34) を満たすものを（エ

ルミット）**対称的**((Hermitian) symmetric) あるいは**自己随伴的** (selfadjoint) であるという．逆に，対称作用素 T は H 上の対称的形式 $\mathfrak{t}[u,v]=(Tu,v)$ を定める．したがって，**すべての $u\in$ H に対して (Tu,u) が実であるためには，T が対称的であることが必要十分である**．対称作用素 T は，それに伴う形式が非負（正）のとき，**非負（正）**であるという．非負の対称作用素 T については，(6.32) に対応して次のような不等式が得られる．

(6.35)
$$\bigl|(T\,u,v)\bigr|\leqq(T\,u,u)^{1/2}\,(T\,v,v)^{1/2},$$
$$\bigl(T(u+v),u+v\bigr)^{1/2}\leqq(T\,u,u)^{1/2}+(T\,v,v)^{1/2}.$$

T が非負対称的であることを示すために，$T\geqq 0$ と書くことにしよう．より一般的に，S,T が $T-S\geqq 0$ を満たす対称作用素であるとき

(6.36)
$$T\geqq S\quad\text{あるいは}\quad S\leqq T$$

と表記するのである．二次形式 (Tu,u) の上限，下限のことを，対称作用素 T の上限，下限と呼ぶ．

問題 6.16.　T が対称的であるならば，実数 α,β に対して $\alpha T+\beta$ も対称的である．より一般的に，実係数の任意の多項式 p に対して，$p(T)$ は対称的である．

問題 6.17.　H, H′ はユニタリ空間とする．H から H′ への任意の線形作用素 T に対して，T^*T および TT^* はそれぞれ，H および H′ における非負の対称作用素である．

問題 6.18.　T が対称的であるならば $T^2\geqq 0$．また $T^2=0$ となるのは $T=0$ のとき，かつその場合に限る．T が対称的で，しかもある正の整数 n に対して $T^n=0$ となるならば，$T=0$ である．

問題 6.19.　$R\leqq S$ かつ $S\leqq T$ ならば $R\leqq T$．また $S\leqq T$ かつ $S\geqq T$ ならば $S=T$．

6.　ユニタリ，等長，正規作用素

H, H′ をユニタリ空間とする．H から H′ への作用素 T が

(6.37)
$$\text{すべての}\quad u\in \mathsf{H}\quad\text{について}\quad \|T\,u\|=\|u\|$$

を満たすとき，T は等長 (isometric) であるという[2]．これは $\big((T^*T-1)u,u\big)=0$ と同値であり，したがって（問題 6.14 を見よ）

$$T^*T=1 \tag{6.38}$$

と同値である．これから

$$\text{すべての}\quad u,v\in \mathsf{H}\quad \text{について}\quad (Tu,Tv)=(u,v) \tag{6.39}$$

が導かれる．等長作用素 T の像が全空間 H' であるとき，T は**ユニタリ** (unitary) であるという．(6.37) から，T による写像は一対一であることがわかるので，H から H' へのユニタリ作用素が存在するためには $\dim\mathsf{H}'=\dim\mathsf{H}$ であることが必要である．逆に $\dim\mathsf{H}'=\dim\mathsf{H}<\infty$ ならば，H から H' へのいかなる等長作用素もユニタリである．後に見るとおり，これは無限次元空間の場合には成り立たない†.

問題 6.20. $T\in\mathcal{B}(\mathsf{H},\mathsf{H}')$ がユニタリであるためには，$T^{-1}\in\mathcal{B}(\mathsf{H}',\mathsf{H})$ が存在し，

$$T^{-1}=T^* \tag{6.40}$$

であることが必要十分である．

問題 6.21. T がユニタリであることは，T^* がユニタリであることと同値である．

問題 6.22. $T\in\mathcal{B}(\mathsf{H}',\mathsf{H}'')$ と $S\in\mathcal{B}(\mathsf{H},\mathsf{H}')$ が等長ならば，$TS\in\mathcal{B}(\mathsf{H},\mathsf{H}'')$ も等長である．“等長”を“ユニタリ”に置き換えても同様である．

あるユニタリ空間からそれ自身への対称作用素およびユニタリ作用素は，**正規作用素** (normal operator) の特殊事例である．$T\in\mathcal{B}(\mathsf{H})$ と T^* とが可換のとき，つまり

$$T^*T=TT^* \tag{6.41}$$

であるとき，T は正規であるという．これは

$$\text{すべての}\quad u\in \mathsf{H}\quad \text{について}\quad \|T^*u\|=\|Tu\| \tag{6.42}$$

---

[2] 等長作用素はより一般的に，任意のふたつのノルム空間の間で定義することができる．しかし本書では一般的な等長作用素を考察する機会はないであろう．

という条件と同値である（再び問題 6.14 に注意）．正規作用素 T のもつ重要な性質は

$$(6.43)\qquad \|T^n\| = \|T\|^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

が成り立つことである．これからとくに

$$(6.44)\qquad \operatorname{spr} T = \|T\|$$

が導かれる．(spr はスペクトル半径を表わす．§4.2 を見よ.)

(6.43) を示すために，まず T が対称的である場合から始める．すると (6.25) により，$\|T^2\| = \|T\|^2$．T^2 は対称的であるから，同様にして $\|T^4\| = \|T^2\|^2 = \|T\|^4$ を得る．同じ段取りで進むと，$n = 2^m$, $m = 1, 2, \ldots$ に対して (6.43) の成り立つことが知られる．さて次に T が正規ではあるが，必ずしも対称的でない場合を想定しよう．再び (6.25) により，$\|T^n\|^2 = \|T^{n*}T^n\|$．しかし (6.41) により，$T^{n*}T^n = (T^*T)^n$ であり，また T^*T は対称的であるから，$n = 2^m$ に対して，$\|T^n\|^2 = \|(T^*T)^n\| = \|T^*T\|^n = \|T\|^{2n}$ を得る．$n = 2^m$ に対して (6.43) がこうして証明される．一般の n については $2^m - n = r \geqq 0$ となるような m を考えよう．(6.43) は n を $n+r = 2^m$ で置き換えて証明されているので，$\|T\|^{n+r} = \|T^{n+r}\| \leqq \|T^n\|\,\|T^r\| \leqq \|T^n\|\,\|T\|^r$，すなわち $\|T\|^n \leqq \|T^n\|$ を得る．しかるに逆の不等号の成り立つことは自明であるから，(6.43) が導かれるのである．

問題 6.23.　T が正規であるならば，任意の多項式 p に対して $p(T)$ も正規である．

問題 6.24.　T が正規かつ非特異ならば，T^{-1} も正規である．

問題 6.25.　T が正規であるとき，ある整数 n について $T^n = 0$ ならば $T = 0$．換言すれば，正規作用素 T が巾零であるためには，$T = 0$ であることが必要十分である．

7.　射影

対称作用素の一重要例は**直交射影** (orthogonal projection) である．H の部分空間 M と分解 $\mathsf{H} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{M}^\perp$　[(6.16) を見よ] を考えよう．$\mathsf{M}^\perp$ に沿っ

ての M への射影作用素 $P = P_{\mathsf{M}}$ を M の直交射影と呼ぶ．このとき P は**対称的かつ非負**である．なぜなら（第 2 項の記号を用いると），$u' \perp u''$ により，

$$(6.45)\qquad (Pu, u) = (u', u' + u'') = (u', u') \geqq 0$$

が成り立つからである．こうして

$$(6.46)\qquad P^* = P, \quad P \geqq 0, \quad P^2 = P$$

である．逆に対称的な巾等作用素 $P \in \mathcal{B}(\mathsf{H})$ は $\mathsf{M} = \mathsf{R}(P)$ への直交射影である．

問題 6.26. $1 - P$ は P とともに直交射影である．P が直交射影ならば，

$$(6.47)\qquad 0 \leqq P \leqq 1^3, \quad P \neq 0 \quad \text{のとき} \quad \|P\| = 1.$$

問題 6.27. $\|(1 - P_{\mathsf{M}})u\| = \mathrm{dist}\,(u, \mathsf{M}), \quad u \in \mathsf{H}.$

問題 6.28. $\mathsf{M} \perp \mathsf{N}$ は $P_{\mathsf{M}} P_{\mathsf{N}} = 0$ と同値である．次の三条件は同値である．$\mathsf{M} \supset \mathsf{N}$, $P_{\mathsf{M}} \geqq P_{\mathsf{N}}$, $P_{\mathsf{M}} P_{\mathsf{N}} = P_{\mathsf{N}}$.

$P_1, \ldots, P_n$ を

$$(6.48)\qquad P_j P_k = \delta_{jk} P_j$$

を満たす直交射影としよう．このときそれらの和

$$(6.49)\qquad P = \sum_{j=1}^{n} P_j$$

もまた直交射影で，その像は P_j の像の直和となる．

直交射影は特別な種類の射影である．もちろんユニタリ空間 H における，より一般的な“斜交”射影を考えることもできる．M, N は必ずしも直交でないとして，$\mathsf{H} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{N}$ とする．また P は N に沿っての M への射影とする．このとき P^* は $\mathsf{M}^{\perp}$ に沿っての $\mathsf{N}^{\perp}$ への射影である［(3.43) を見よ］.

---

[3] 対称作用素について定義される順序関係を表わすのに用いる記号 $0 \leqq P \leqq 1$ [(6.36) を見よ] は，射影について先に導入された記号（§ 3.4 を見よ）と抵触するものではなかろう．

問題 6.29. 射影 $P \neq 0$ に対して $\|P\| \geqq 1$ が成り立つ．$\|P\| = 1$ であるためには，P が直交射影であることが必要十分である．[“必要性”へのヒント：$u \in \mathsf{N}^{\perp}$ とする．このとき $u \perp (1-P)u$．ピタゴラスの定理を適用して $\|Pu\|^2 = \|u\|^2 + \|(1-P)u\|^2$ を得る．これと $\|P\| = 1$ とから $\mathsf{N}^{\perp} \subset \mathsf{M}$ を導け．反対の包含関係を導くには P^* を考えよ.]

問題 6.30. 正規射影は直交である．

問題 6.31. P はユニタリ空間における射影で，$0 \neq P \neq 1$ とする．このとき $\|P\| = \|1 - P\|$[4]．

8. 射影の組

さて H における射影の組 P, Q を考え，$P - Q$ が十分に小さければ $\mathsf{R}(P)$ と $\mathsf{R}(Q)$ とが同型になるという，§4.6 の結果を想起しよう．ここに掲げる新しい結果は，**P と Q とが直交射影ならば，(4.38) によって与えられる作用素 U はユニタリになる** という命題である．これは $U'^* = V'$ かつ $R^* = R$ [(4.36), (4.33) を見よ] であること，そしてこれにより $U^* = V = U^{-1}$ であることに注意すればわかる．かくして次の定理が得られる．

定理 6.32. $\|P - Q\| < 1$ を満たすふたつの直交射影 P と Q とは**ユニタリ同値** (unitarily equivalent) である．ここでユニタリ同値とは，$Q = UPU^{-1}$ なる性質を有するユニタリ作用素 U が存在することを意味する．

問題 6.33. 任意の直交射影の組 P, Q に対して $\|P - Q\| \leqq 1$ が成り立つ [(4.34) を見よ]．

これと類似の，しかし幾分深い結果が次の定理によって与えられる．

定理 6.34.[5] P, Q をふたつの直交射影，$\mathsf{M} = \mathsf{R}(P)$, $\mathsf{N} = \mathsf{R}(Q)$ とし，また

$$\|(1 - Q)\,P\| = \delta < 1 \tag{6.50}$$

---

[4] Del Pasqua [1], T. Kato [13] を見よ．

[5] T. Kato [12] 補題 221 を見よ．この定理は $\dim \mathsf{H} = \infty$ の場合においてもなお成立する．これよりも早く，類似の，しかしやや弱い結果が Akhiezer and Glazman【1】, §34 によって与えられた．

が成り立つものとしよう．このとき次の命題のうちいずれか一方が成り立つ．

i) Q は M を N の上に一対一かつ両連続に写す．しかも

$$\|P-Q\| = \|(1-P)\,Q\| = \|(1-Q)\,P\| = \delta. \tag{6.51}$$

ii) Q は M を N の真の部分集合 N_0 の上に一対一かつ両連続に写す．また Q_0 を N_0 への直交射影とすれば，

$$\begin{aligned}\|P-Q_0\| &= \|(1-P)\,Q_0\| = \|(1-Q_0)\,P\| \\ &= \|(1-Q)\,P\| = \delta, \\ \|P-Q\| &= \|(1-P)\,Q\| = 1.\end{aligned} \tag{6.52}$$

証明． 任意の $u\in\mathsf{M}$ に対して，$\|u-Qu\| = \|(1-Q)Pu\| \leqq \delta\|u\|$ であるから，$\|Qu\| \geqq (1-\delta)\|u\|$．こうして M から N への写像 $u\to Qu$ は一対一で両連続（つまりこの写像も逆写像もともに連続）である．したがって，この写像の像 $Q\mathsf{M}=\mathsf{N}_0$ は N の閉部分空間となる．Q_0 を N_0 への直交射影としよう．

任意の $w\in\mathsf{H}$ に対して，$Q_0\,w$ は N_0 の元であり，したがって $Q_0\,w = Qu$ となる $u\in\mathsf{M}$ が存在する．$Q_0\,w\neq 0$ ならば $u\neq 0$ であり，$(1-P)u=0$ ゆえ

$$\begin{aligned}\|(1-P)\,Q_0\,w\| &= \|(1-P)\,Q\,u\| \\ &= \|(1-P)(Q\,u - \|Q\,u\|^2\,\|u\|^{-2}\,u)\| \\ &\leqq \|Q\,u - \|Q\,u\|^2\,\|u\|^{-2}\,u\|.\end{aligned} \tag{6.53}$$

それゆえ

$$\begin{aligned}\|(1-P)\,Q_0\,w\|^2 &\leqq \|Q\,u\|^2 - \|Q\,u\|^4\,\|u\|^{-2} \\ &= \|Q\,u\|^2\,\|u\|^{-2}\,(\|u\|^2 - \|Q\,u\|^2) \\ &= \|u\|^{-2}\,\|Q_0\,w\|^2\,\|(1-Q)\,u\|^2 \\ &\leqq \|u\|^{-2}\,\|w\|^2\,\|(1-Q)\,P\,u\|^2 \leqq \delta^2\,\|w\|^2.\end{aligned} \tag{6.54}$$

この不等式は $Q_0 w = 0$ の場合でも成立する．したがって

$$\|(1-P)\,Q_0\| \leqq \delta = \|(1-Q)\,P\|\,. \tag{6.55}$$

$1 - Q_0$ の像と Q_0 の像とは直交するので，任意の $w \in \mathsf{H}$ について

$$\begin{aligned}\|(P-Q_0)\,w\|^2 &= \|(1-Q_0)\ Pw - Q_0\,(1-P)\,w\|^2 \\ &= \|(1-Q_0)\ Pw\|^2 + \|Q_0\,(1-P)\,w\|^2.\end{aligned} \tag{6.56}$$

$P = P^2$, $1 - P = (1-P)^2$ に注意すれば，(6.56) から

$$\begin{aligned}\|(P-Q_0)\,w\|^2 \leqq{}& \|(1-Q_0)\,P\|^2\,\|Pw\|^2 \\ &+ \|Q_0\,(1-P)\|^2\,\|(1-P)\,w\|^2\end{aligned} \tag{6.57}$$

を得る．Q_0 の定義により，$Q_0 P = Q_0 QP = QP$ であるから，(6.55) により，$\|(1-Q_0)\,P\| = \|(1-Q)\,P\| = \delta$ であり，また $\|Q_0(1-P)\| = \|\bigl(Q_0(1-P)\bigr)^*\| = \|(1-P)\,Q_0\| \leqq \delta$．ゆえに

$$\|(P-Q_0)\,w\|^2 \leqq \delta^2\left(\|Pw\|^2 + \|(1-P)\,w\|^2\right) = \delta^2\,\|w\|^2. \tag{6.58}$$

これから $\|P - Q_0\| \leqq \delta$ が導かれる．実はこれは等号で成り立つ．なぜなら

$$\begin{aligned}\delta &= \|(1-Q)\,P\| = \|(1-Q_0)\,P\| \\ &= \|(P-Q_0)\,P\| \leqq \|P-Q_0\| \leqq \delta\end{aligned} \tag{6.59}$$

だからである．$\|P - Q_0\| = \delta < 1$ という事実から，P は $\mathsf{N}_0 = \mathsf{R}(Q_0)$ を M の上に一対一に写すことが導かれる（問題 4.11 を見よ）．こうして P, Q の組 を Q_0, P で置き換えて上記の結果 (6.55) を適用すれば，$\|(1-Q_0)\,P\| \leqq \|(1-P)\,Q_0\|$ を得る．そこで (6.59) との比較により，(6.55) においてもまた等号が得られることがわかる．

$\mathsf{N}_0 = \mathsf{N}$ の場合は，これで i) の証明が完了する．$\mathsf{N}_0 \neq \mathsf{N}$ の場合は，(6.52) の最後の等式を示すことが残っている．v を N_0 には含まれない N の元としよう．上に注意したとおり $P\mathsf{N}_0 = \mathsf{M}$ であるから，$Pv_0 = Pv$ を満たす $v_0 \in \mathsf{N}_0$ が存在する．こうして $w = v - v_0 \in \mathsf{N}$, $w \neq 0$ かつ $Pw = 0$ であるから，$(P-Q)w = -w$ であり，また $Q(1-P)w = Qw = w$ である．か

くして $\|P-Q\| \geqq 1$ で，しかも $\|(1-P)Q\| = \|Q(1-P)\| \geqq 1$．反対の不等号が成り立つことは既にわかっている（問題 6.33 を見よ）から，これで所望の結論が得られたのである．

定理 6.34 の応用として，斜交射影と直交射影の組に関するひとつの不等式を得る．

定理 6.35. P', Q' を H における斜交射影の組とし，$\mathsf{M} = \mathsf{R}(P'), \mathsf{N} = \mathsf{R}(Q')$ とする．また P, Q はそれぞれ M, N への直交射影とする．このとき

$$\|P-Q\| \leqq \|P'-Q'\| \tag{6.60}$$

が成り立つ．

証明. $\|P-Q\|$ は決して 1 を超えない（問題 6.33 を見よ）から，$\|P'-Q'\| = \delta' < 1$ の場合を考えれば十分である．任意の $u \in \mathsf{H}$ に対して，$\|(1-Q)\,Pu\| = \text{dist}\,(Pu, \mathsf{N}) \leqq \|Pu - Q'Pu\| = \|(P'-Q')\,Pu\| \leqq \delta'\|Pu\| \leqq \delta'\|u\|$ を得る（問題 6.27 を見よ）．したがって $\|(1-Q)\,P\| \leqq \delta' < 1$ である．同様に $\|(1-P)\,Q\| \leqq \delta' < 1$ を得る．こうして定理 6.34 を適用することができ，ii) の場合は除去されるので，(6.51) により，$\|P-Q\| = \|(1-P)\,Q\| \leqq \delta' = \|P'-Q'\|$ となる．

問題 6.36. P', Q' は $\|P'-Q'\| < 1$ を満たす斜交射影とし，$\mathsf{M} = \mathsf{R}(P')$, $\mathsf{N} = \mathsf{R}(Q')$ とすれば，$U\mathsf{M} = \mathsf{N}, U^{-1}\mathsf{N} = \mathsf{M}$ を満たすユニタリ作用素 U が存在する．(この命題は無限次元の場合に直接拡張することができる．ただし自明ではない．)

問題 6.37. $0 \leqq \kappa \leqq 1$ とし，$P'(\kappa)$ は κ に連続に依存する斜交射影とする．また $P(\kappa)$ は $\mathsf{M}(\kappa) = \mathsf{R}(P'(\kappa))$ への直交射影とする．このとき $P(\kappa)$ も κ について連続である．また $U(\kappa)\mathsf{M}(0) = \mathsf{M}(\kappa), U(\kappa)^{-1}\mathsf{M}(\kappa) = \mathsf{M}(0)$ を満たし，かつ κ に連続的に依存するユニタリ作用素 $U(\kappa)$ の族が存在する．

注意 6.37 a. P, Q を直交射影とする．$R = (P-Q)^2$ は P および Q と可換であることを想起しよう（§4.6 を見よ）．これから P と Q の連立スペクトル分解が導かれる．R は自己随伴で $0 \leqq R \leqq 1$（問題 6.33 を参照）であるから，R の固有値 λ はすべて $0 \leqq \lambda \leqq 1$ を満たす．P, Q の双方はともに各固有空間 $\mathsf{M}(\lambda)$ によって被約である．$\mathsf{M}(\lambda)$ において，P と Q は本質的

に，2次元空間におけるふたつの1次元射影の如き挙動を呈し[6]，$\lambda = \sin^2\theta$ とすればそれらの像は角 θ を有する．

9. 固有値問題

ここでユニタリ空間 H における作用素の固有値問題を考えよう．一般の作用素 T については，土台となる空間がユニタリであるという事実によって得られる単純化はさして大きくない．どんな線形空間でも内積を導入すればユニタリ空間にすることができるが，それに対して，固有値問題はなんらかの内積，否，ノルムについてさえもかかわることなく定式化できることに注意すれば，この点は明白であろう．ユニタリ空間を考える利点は，作用素 T がユニタリ空間の設定に特有なある特別な性質，たとえば対称性，ユニタリ性あるいは正規性といった性質を有するときに発生するのである．

定理 6.38.　正規作用素は対角化可能であり，その固有射影は直交射影である．

証明.　T を正規とする．T と T^* は可換であるから，

$$(T-\zeta)(T^*-\zeta') = (T^*-\zeta')(T-\zeta) \tag{6.61}$$

である．ζ が T の固有値でなく，また ζ' が T^* の固有値でないならば，(6.61) の逆が存在し，

$$R^*(\zeta')\,R(\zeta) = R(\zeta)\,R^*(\zeta') \tag{6.62}$$

が成り立つ．ここで $R(\zeta)$, $R^*(\zeta')$ はそれぞれ T および T^* のレゾルベントである．(6.62) から，これらのレゾルベントが可換であることが知られる．T の固有値 λ_h に対応する固有射影 P_h の表現 (5.22) を考慮し，ζ, ζ' の平面の適当な径路に沿って (6.62) に二重積分を施すと，

$$P_k^*\,P_h = P_h\,P_k^*, \quad h,k = 1,\ldots,s \tag{6.63}$$

なる関係を得る．T^* は固有値 $\bar{\lambda}_h$ を有し，また対応する固有射影は P_k^* であ

---

[6] 詳しくは Davis [2] を見よ．

る (§5.5) ことを思い出しておこう．とくに P_h と P_h^* は可換であり，これは P_h が正規であることを意味する．これから P_h が直交射影であることが導かれる（問題 6.30 を見よ）．すなわち

$$P_h^* = P_h, \quad h = 1, \ldots, s. \tag{6.64}$$

固有巾零作用素は (5.26) により，$D_h = (T-\lambda_h)P_h$, $D_h^* = (T^*-\bar{\lambda}_h)P_h^* = (T^*-\bar{\lambda}_h)P_h$ として与えられる．P_h と T は可換，$P_h = P_h^*$ は T^* と可換，また T^* は T と可換であるから，D_h は D_h^* と可換であること，すなわち D_h が正規であることが導かれる．D_h は正規な巾零作用素であるから，ゼロとならねばならない（問題 6.25）．このようにして，T は対角化可能である．

かくして，正規作用素 T のスペクトル表現は，

$$T = \sum_{h=1}^{s} \lambda_h P_h, \quad T^* = \sum_{h=1}^{s} \bar{\lambda}_h P_h, \tag{6.65}$$

$$P_h^* = P_h, \quad P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad \sum_{h=1}^{s} P_h = 1$$

の形態を有する．T と T^* は同一の固有空間の集合をもつが，それは同時に代数的かつ幾何的固有空間となっており，しかもそれは互いに直交する．さらに (6.65) から

$$T^* T = T T^* = \sum_{h=1}^{s} |\lambda_h|^2 P_h \tag{6.66}$$

が導かれる．それゆえ

$$\|T u\|^2 = (T^* T u, u) = \sum_h |\lambda_h|^2 (P_h u, u) \leqq \left(\max |\lambda_h|^2\right) \sum (P_h u, u)$$
$$= (\max |\lambda_h|^2) \|u\|^2.$$

これから $\|T\| = \max|\lambda_h|$ であることが知られる．他方，$u \in \mathsf{M}_h = \mathsf{R}(P_h)$ に対しては，$\|Tu\| = |\lambda_h| \|u\|$．こうして正規作用素 T に対しては

$$\|T\| = \max_h |\lambda_h| \tag{6.67}$$

が成り立つのである．

各 M_h において直交基底を選ぶと，これらの基底を構成する元の総体は H の直交基底を形づくる．換言すれば

$$T\varphi_n = \mu_n \varphi_n, \quad n = 1, \ldots, N \tag{6.68}$$

を満たす H の正規直交基底 $\{\varphi_n\}$ が存在するのである．ここで $\mu_n, n = 1, \cdots, N$ は T の重複固有値である．この基底に関する T の行列表現は

$$\tau_{jk} = (T\varphi_k, \varphi_j) = \mu_k \delta_{jk} \tag{6.69}$$

なる要素をもち，これは対角要素 μ_j の対角行列である．

問題 6.39.　スペクトル表現 (6.65) をもつ作用素は正規である．

問題 6.40.　対称作用素の固有値は実数に限られる．また実数の固有値のみをもつ正規作用素は対称的である．

問題 6.41.　ユニタリ作用素の各固有値の絶対値は 1 である．またすべての固有値の絶対値が 1 に等しい正規作用素はユニタリである．

問題 6.42.　対称作用素が非負（正）であるためには，その固有値がすべて非負（正）であることが必要十分である．対称作用素の上（下）限は，その固有値の最大値（最小値）である．

問題 6.43.　T を正規とすれば，

$$\begin{aligned} \|R(\zeta)\| &= 1/\min_k \ |\zeta - \lambda_k| = 1/\mathrm{dist}\left(\zeta, \Sigma(T)\right), \\ \|S_h\| &= 1/\min_{k \neq h} |\lambda_h - \lambda_k|. \end{aligned} \tag{6.70}$$

ここで $R(\zeta)$ は T のレゾルベントであり，S_h は (5.18) と同様である．

10.　ミニ・マックス原理

T を H における対称作用素とする．T は対角化可能で，固有値はすべて実数である（問題 6.40）．T の重複固有値を小さいものから順に並べ，

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_N \tag{6.71}$$

とする．H の各部分空間 M に対して

$$(6.72) \qquad \mu[\mathsf{M}] = \mu[T, \mathsf{M}] = \min_{\substack{u \in \mathsf{M} \\ \|u\|=1}} (Tu, u) = \min_{0 \neq u \in \mathsf{M}} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2}.$$

とおく．このとき**ミニ・マックス原理**(minimax principle)（あるいはむしろ**マックス・ミン原理**, maximin principle）とは

$$(6.73) \qquad \mu_n = \max_{\operatorname{codim} \mathsf{M} = n-1} \mu[\mathsf{M}] = \max_{\operatorname{codim} \mathsf{M} \leqq n-1} \mu[\mathsf{M}]$$

を主張する命題である．ここで max は指定された性質を有するすべての部分空間 M についてとるのである．(6.73) は次のふたつの命題に同値である．

(6.74) $\operatorname{codim} \mathsf{M} \leqq n-1$ なる任意の M について $\mu_n \geqq \mu[\mathsf{M}]$;

(6.75) $\operatorname{codim} \mathsf{M}_0 = n-1$ なるある M_0について $\mu_n \leqq \mu[\mathsf{M}_0]$.

これらの命題を別々に証明しよう．

$\{\varphi_n\}$ を性質 (6.68) を具えた正規直交基底とする．各 $u \in \mathsf{H}$ はこの基底について

$$(6.76) \qquad u = \sum \xi_n \varphi_n, \quad \xi_n = (u, \varphi_n), \quad \|u\|^2 = \sum |\xi_n|^2$$

なる展開を有する．すると

$$(6.77) \quad Tu = \sum \xi_n T\varphi_n = \sum \mu_n \xi_n \varphi_n, \ (Tu, u) = \sum \mu_n |\xi_n|^2$$

を得る．

M を $\operatorname{codim} \mathsf{M} \leqq n-1$ なる任意の部分空間とする．$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ の張る n 次元部分空間 M′ は，非ゼロのベクトル u を M と共有する．(これは補題 6.11 の帰結で，M を $\mathsf{M}^\perp$ で置き換えて考えればよい.) この u の係数 $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \cdots$ はゼロに等しい．したがって $(Tu, u) = \sum \mu_k |\xi_k|^2 \leqq \mu_n \sum |\xi_k|^2 = \mu_n \|u\|^2$. これで (6.74) が示された．

$\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}$ に直交するすべてのベクトルから成る部分空間を M_0 とすると，$\operatorname{codim} \mathsf{M}_0 = n-1$ である．各 $u \in \mathsf{M}_0$ はゼロの係数 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ を有する．ゆえに $(Tu, u) \geqq \mu_n \sum |\xi_k|^2 = \mu_n \|u\|^2$ を得，これから (6.75) が導かれる．

ミニ・マックス原理は，固有ベクトルになにも言及することなく固有値 μ_n

を特徴づけるための便利な手段である．この原理の応用として，次の**単調性原理**(monotonicity principle) を証明しよう．

定理 6.44. S, T は $S \leqq T$ を満たす対称作用素とすれば，S の固有値はそれに対応する T の固有値より大きくはない．つまり

$$\mu_n[S] \leqq \mu_n[T], \quad n = 1, \ldots, N. \tag{6.78}$$

ここで $\mu_n[T]$ は，(6.71) と同様，T の固有値を小さなものから順に並べた，第 n 番目の値である．

この証明はミニ・マックス原理からただちに導かれる．実際，$S \leqq T$ から $(Su, u) \leqq (Tu, u)$ が得られ，したがって任意の部分空間 M について $\mu[S, \mathsf{M}] \leqq \mu[T, \mathsf{M}]$ となるからである．

問題 6.45. 対称作用素 S, T のすべての組について，

$$\mu_1[S] + \mu_1[T] \leqq \mu_1[S+T] \leqq \mu_1[S] + \mu_N[T]. \tag{6.79}$$

M を H の部分空間，その直交射影を P とする．H における任意の作用素 T に対して，$S = PTP$ を **T の M への直交射影**と呼ぶ．M は S の下に不変であり，したがって S の M における固有値（すなわち S の M における部分 S_{M} の固有値）について論じることができる．$r = \operatorname{codim} \mathsf{M}$ とするとき，S_{M} は $N - r$ 個の重複固有値をもつことに注意しよう．

定理 6.46. T, S, S_{M} は上と同様とする．T が対称的ならば，S および S_M も対称的で，

$$\mu_n[T] \leqq \mu_n[S_{\mathsf{M}}] \leqq \mu_{n+r}[T], \quad n = 1, \ldots, N - r. \tag{6.80}$$

証明. S と S_{M} の対称性は明らかである．また $\mu_n[S_{\mathsf{M}}]$ は $\max \mu[S_{\mathsf{M}}, \mathsf{M}']$ に等しい．ここで max は M に関する M' の余次元が $n-1$ に等しい（つまり $\dim \mathsf{M}/\mathsf{M}' = n - 1$）すべての $\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}$ についてとるのである．しかし，任意の $u \in \mathsf{M}$ について $(S_{\mathsf{M}}u, u) = (Su, u) = (Tu, u)$ であるから，$\mu[S_{\mathsf{M}}, \mathsf{M}'] = \mu[S, \mathsf{M}'] = \mu[T, \mathsf{M}']$ が成り立つ．また $\dim \mathsf{M}/\mathsf{M}' = n - 1$ は $\operatorname{codim} \mathsf{M}' = \dim \mathsf{H}/\mathsf{M}' = n + r - 1$ を意味する．したがって $\mu_n[S_{\mathsf{M}}]$ は $\mu_{n+r}[T] = \max \mu[T, \mathsf{M}']$ を超えない．ここで max は $\operatorname{codim} \mathsf{M}' = n + r - 1$

を満たすすべての $\mathsf{M}' \subset \mathsf{H}$ についてとるのである．これで (6.80) の第二の不等式が示された．

他方，M_0 を (6.75) と同様とすれば，$\mu_n[T] = \mu[T, \mathsf{M}_0]$ を得る．したがって $\mu_n[T] \leqq \mu[T, \mathsf{M}_0 \cap \mathsf{M}] = \mu[S_{\mathsf{M}}, \mathsf{M}_0 \cap \mathsf{M}]$．しかし $\operatorname{codim} \mathsf{M}_0 = n-1$ であるから，M に関する $\mathsf{M}_0 \cap \mathsf{M}$ の余次元は $n-1$ より大きくはない．かくして (6.74) により，$\mu[S_{\mathsf{M}}, \mathsf{M}_0 \cap \mathsf{M}] \leqq \mu_n[S_{\mathsf{M}}]$．これで (6.80) の第一の不等式が証明されたのである．

11. 消散作用素と縮小半群

H における線形作用素 A が

(6.81) すべての $u \in \mathsf{H}$ と $\xi > 0$ について $\|(A-\xi)u\| \geqq \xi \|u\|$

なる条件を満たすとき，A は**消散的**(dissipative) であるという．また $-A$ が消散的であるとき，A は**増大的** (accretive) であるという[7]．

A のレゾンベルト $R(\zeta) = (A-\zeta)^{-1}$ を導入すると，条件 (6.81) は

(6.82) $\xi > 0$ について $\|R(\xi)\| \leqq 1/\xi$

と同値である．これから，すべての正の実数はレゾンベルト集合 $\mathrm{P}(A)$ に属することが導かれる．

(6.82) からは，$t > 0$ に対して $\|(1-tA)^{-1}\| \leqq 1$ であることも知られる．系 4.15 により

(6.83) $t > 0$ について $\|e^{tA}\| \leqq 1$.

$t \geqq 0$ に視野を限るとき，族 e^{tA} は $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$ を満たすから，これは**半群**(semigroup) を成す（(4.21b) を見よ）．(6.83) によれば，A が消散的であるとき，e^{tA} は**縮小半群** (contraction semigroup) を形づくることがわかる．

---

[7] 以下の定義，結果のいくつかは（定理 6.49 の (iii) を含めて），任意の（∞ 次元）バナッハ空間 X においても成り立つ．ヒルベルト空間における消散作用素についての詳細は V-§3.10-11 で論ずる†．

その逆も成り立つ．これを示すために，次の公式に注意しよう．

$$\text{(6.84)} \qquad \operatorname{Re}\zeta > 0 \text{ に対して} \quad -R(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} e^{tA}\, dt.$$

これは $R(\zeta)$ が e^{tA} のラプラス変換となっていることを意味する．(6.84) は $(d/dt)(e^{-\zeta t}e^{tA}) = (A-\zeta)e^{-\zeta t}e^{tA}$ を積分して，容易に導かれる．

定理 6.47.　A が消散的であるためには，すべての $u \in \mathsf{H}$ について $\operatorname{Re}(Au, u) \leqq 0$ であることが必要十分である．

証明.　(6.81) は，すべての $\xi > 0$ に対して $\|Au\|^2 \geqq 2\xi \operatorname{Re}(Au, u)$ の成り立つことと同値である．そしてこれは $\operatorname{Re}(Au, u) \leqq 0$ の場合，またその場合に限って成り立つことは明白であろう．

定理 6.48.　次の諸条件は同値である．

(i) A は消散的．

(ii) すべての $\xi > 0$ に対して $R(\xi)$ は消散的．

(iii) すべての $\xi > 0$ に対して $-AR(\xi)$ は消散的．

証明.　まず，T^{-1} が存在する場合，T^{-1} が消散的であるためには，T が消散的であることが必要十分であることに留意する．$u = T^{-1}v$ について $(T^{-1}v, v) = (u, Tu)$ であるから，このことは定理 6.47 から知られる．また定理 6.47 からただちに知られるとおり，A が消散的であるためには，すべての $\xi > 0$ に対して $A - \xi$ が消散的であることが必要十分である．ゆえに (i) と (ii) の同値性が判明する．また $u = R(\xi)v$ とすれば，$\operatorname{Re}(AR(\xi)v, v) = \operatorname{Re}(Au, (A-\xi)u) = \|Au\|^2 - \xi\operatorname{Re}(Au, u) \geqq 0$ であることにより，(iii) は (i) から導かれる．逆に，$\xi \to \infty$ のとき $-\xi AR(\xi) \to A$ であるから，(iii) から (i) が導かれる．

定理 6.49.　A は消散的であるとする．0 が A の固有値ならば，それは半単純で，それに対応する固有射影 P は自己随伴，しかも対応する 0 における被約レゾルベント S は消散的である．

証明.　(6.82) によれば，$R(\zeta)$ は $\zeta=0$ において高々位数 1 の極を有する．$\lambda_h=0, P_h=P, D_h=D$ としてロラン展開公式 (5.18) に鑑れば，$D=0$（したがって $\lambda=0$ は半単純）かつ $\|P\|\leqq 1$ とならねばならない．したがって $P^*=P$ である（問題 6.29 を見よ）．

一方，(5.18)，(5.19) から

$$S=\lim_{\xi\searrow 0}(1-P)\,R\,(\xi)\,(1-P)$$

である．定理 6.48，(ii) によれば，$\xi>0$ に対して $R(\xi)$ は消散的であるから，

$$\mathrm{Re}\,(S\,u,u)=\lim_{\xi\searrow 0}\,\mathrm{Re}\,(R\,(\xi)\,v,v)\leqq 0,\quad v=(1-P)\,u$$

を得る．これで S が消散的であることが示されたのである．

問題 6.50.　H が対称的であるならば，$\pm iH$ は消散的かつ増大的である．H が対称的で $H\geqq 0$ であるならば，$\mathrm{Re}\,c\leqq 0$ に対して cH は消散的である．とくに H は増大的で，$-H$ は消散的である．

§ 7.　正行列

1.　定義と記号

T を $N\times N$ 型の行列とし，その行列要素がことごとく正 [非負] の実数であるとき，T は正 [非負] であるという．この概念は，先の節 (§6.5) において考察された正 [非負] 対称作用素の概念とは全く異なるものである．本節では非負行列に関する基本的な事実を紹介する[1]．さらに，非負行列の摂動に関する若干の結果が，次章において論じられるであろう．

以下においては，複素線形空間 $\mathsf{X}=\mathsf{C}^N$，$0<N<\infty$，すなわちすべての

---

[1] 非負行列については，たとえば Gantmacher【1】，Schaefer【1】を見よ．§6.5 において考察された対称作用素の正（あるいは正値定符号）の概念との生じうる混同を避けるために，われわれは $T>0$, $T\geqq 0$ という記号を§6.5 の意味においてのみ用いる．本節の意味での非負作用素は，**正値を保存する**(positivity-preserving) 作用素とも時々称せられる．それを表わす便利な記法は $T\in\mathcal{B}_+(X)$ である．しかし本節の大半をつうじて，この新しい正値性を専ら考えるので，実際にはいかなる混同も生じえないであろう．

数ベクトル $u=(\xi_j)$ の集合を考察する．$1 \leqq j \leqq N$ に対して $\xi_j \geqq 0$ $[\xi > 0]$ のとき，u は非負 [正] であるといい，それを記号で $u \geqq 0$ $[u \gg 0]$ と書く．$u > 0$ という記号は "$u \geqq 0$ かつ $u \neq 0$" を表わすために留保しておこう．この定義は，X の標準基底を用いて表わされたものであることに注意しておかねばならない（例 1.4 を見よ）．X の他の基底に関する u の成分を用いることは許されていないのである．

(1.15) から (1.17) にかけて掲げたようなノルムを X に導入することが便利である．どのノルムを用いるかは，必要な場合以外は特定化しないままで進むことにしよう．

$u=(\xi_j) \in \mathsf{X}$ に対して

$$|u| = \bigl(|\xi_j|\bigr), \quad \text{したがって} \quad |u| \geqq 0 \tag{7.1}$$

と書く．

随伴空間 X* は通常の方法で C^N と同一視されるわけだが，X* のベクトルについても正値性を定義する．こうすると（(2.19), (2.33) を見よ）

$$(u,f) = \overline{(f,u)} = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \,\overline{\alpha}_j\,,\ u=(\xi_j)\in \mathsf{X},\ f=(\alpha_j)\in \mathsf{X}^* \tag{7.2}$$

である．すべての j に対して $\alpha_j \geqq 0$　$[\alpha_j > 0]$ のとき，$f=(\alpha_j) \in \mathsf{X}^*$ は非負 [正] であるといい，これを $f \geqq 0$ $[f \gg 0]$ という記号で表記する．ここでもまた $f > 0$ は，$f \geqq 0$ かつ $f \neq 0$ を意味する．

補題 7.1.　$f \geqq 0$ であるためには，すべての $u \geqq 0$ に対して $(f,u) \geqq 0$ となることが必要十分である．$f \gg 0$ であるためには，すべての $u > 0$ に対して $(f,u) > 0$ となることが必要十分である．$u \geqq 0$ であるためには，すべての $f \geqq 0$ に対して $(f,u) \geqq 0$ となることが必要十分である．$u \gg 0$ であるためには，すべての $f > 0$ に対して $(f,u) > 0$ となることが必要十分である．

任意の $f=(\alpha_j) \in \mathsf{X}^*$ に対して，$|f| = (|\alpha_j|)$ と定義し，したがって $|f| \geqq 0$ である．明らかに

$$\bigl|(u,f)\bigr| = \bigl|(f,u)\bigr| \leqq \bigl(|u|,|f|\bigr) = \bigl(|f|,|u|\bigr)\,. \tag{7.3}$$

$N \times N$ 型の行列 T は通常の方法（(3.6) を見よ）で，X における線形作用素を定義し，われわれはそれを T と同一視する．T の行列要素がすべて非負 [正] のとき，T は**非負** [**正**] であるという．$u \geqq 0$ ならば $Tu \geqq 0$ が成り立つとき T は非負であるといい，また $u > 0$ ならば $Tu \gg 0$ が成り立つとき T は正であるといっても，同値な定義である．T が非負であるためには T^* が非負であることが必要十分であり，これは容易に知られる．T が非負ならば，

$$|Tu| \leqq T|u| \, (u \in \mathsf{X}), \quad |T^* f| \leqq T^*|f| \quad (f \in \mathsf{X}^*), \tag{7.4}$$

$$\big|(Tu, f)\big| = \big|(u, T^* f)\big| \leqq \big(T|u|, |f|\big) = \big(|u|, T^*|f|\big). \tag{7.5}$$

X [X^*] におけるすべての非負ベクトルの集合を X_+ [X^*_+] と表記する．X_+ [X^*_+] のベクトルの一次結合の全体は全空間 X [X^*] を尽くすという意味において，X_+ [X^*_+] は X [X^*] の**基本的** (total, fundamental) 部分集合である．

2. 非負行列のスペクトルの特性

次の結果は，いわゆる**ペロン-フロベニウスの定理**の一部を成すものである．

定理 7.2. T を非負行列とする．そのスペクトル半径 $\operatorname{spr} T$ は T の固有値であり，非負の固有ベクトル u をもつ．T のこれ以外の固有値はどれも，絶対値が $\operatorname{spr} T$ を超えることはなく，また正の固有ベクトルをもつこともない．

$\operatorname{spr} T$ は T の**主固有値**(principal eigenvalue)（あるいは**優固有値**，dominant eigenvalue）と呼ばれる．また T のその他の固有値も非負の固有ベクトルをもちうることに注意しておくべきであろう．

証明 レゾルベント $R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$ は展開 (5.10) をもつ．

$$R(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^{-n-1} T^n \quad \big(|\zeta| > r = \operatorname{spr} T\big). \tag{7.6}$$

T は非負であるから，その巾 T^n はすべて非負である．したがって実数 $\xi > r$ に対して，$-R(\xi)$ は非負である．(5.8) により，$(d/d\zeta)^k R(\zeta) = k!\, R(\zeta)^{k+1}$ であるから，

$$(7.7)\qquad \xi > r \quad に対して \quad -(-d/d\xi)^k R(\xi) \quad は非負$$

となる.

任意の $u \in \mathsf{X}, f \in \mathsf{X}^*$ に対して，(7.6) から

$$(7.8)\qquad \begin{aligned} \left|R(\zeta)u,f)\right| &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\zeta|^{-n-1}\left|(T^n u,f)\right| \\ &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\zeta|^{-n-1}\left(T^n|u|,|f|\right) \\ &= -\big(R(|\zeta|)\,|u|,|f|\big) \quad \big(|\zeta|>r\big) \end{aligned}$$

を得る．ここで (7.5) を用いた．

(5.12) によれば，レゾルベント $R(\zeta)$ はすくなくともひとつの極 $re^{i\theta}, 0 \leqq \theta < 2\pi$ をもつ．それゆえ $\zeta \to re^{i\theta}$ のとき $|(R(\zeta)u,f)| \to \infty$ を満たす $u \in \mathsf{X}$ と $f \in \mathsf{X}^*$ が存在する．すると (7.8) から，$|\zeta| \searrow r$ のとき $-(R(|\zeta|)|u|,|f|) \to \infty$ であることがわかる．これから r は $R(\zeta)$ の極であり，したがって T の固有値であることが導かれる．

さて次に，$\zeta = r$ における $R(\zeta)$ のローラン展開を考えてみよう．すなわち

$$(7.9)\qquad \begin{aligned} R(\zeta) = -(\zeta-r)^{-m} D^{m-1} - \cdots - (\zeta - r)^{-1} P \\ + S + (\zeta - r) S^2 + \cdots \end{aligned}$$

である（(5.18) を見よ）．上で注意したとおり，$\xi > r$ に対しては $-R(\xi)$ は非負であるから，(7.9) から，$D^{m-1} = -\lim_{\xi\searrow r}(\xi-r)^m R(\xi)$ は非負である．（m の定義により）$D^{m-1} \neq 0$ ゆえ，$u = D^{m-1}v > 0$ を満たす $v > 0$ を見出すことができる（X_+ が基本的であることを想起せよ）．$(T-r)u = (T-r)D^{m-1}v = D^m v = 0$ である（(5.30) を参照し，$D^m = 0$ に注意）から，u は T の固有値 r に対する非負固有ベクトルである．

定理の最後の命題を示すために，μ を T のいまひとつの固有値，v をその固有ベクトルとする．T^* は T とともに非負であるから，$\mathrm{spr}T^* = \mathrm{spr}T = r$ は T^* の固有値であり，固有ベクトル $u^* > 0$ をもつ．こうして $\mu(v,u^*) = (Tv,u^*) = (v,T^*u^*) = r(v,u^*)$．$\mu \neq r$ であるから，$(u,v^*) = 0$ が導かれるが，$v \gg 0$ とすればこれは不可能である [$|\mu| \leqq r$ は既知である．(5.12) を見よ]．

定理 7.3.　T を正とすれば，T の主固有値は正でしかも単純（代数的重複度 1）である．非負の固有ベクトルをもつ T の固有値は，これ以外に存在しない．

証明　$u > 0$ を固有値 $r = \operatorname{spr} T$ に対応する T の固有ベクトルとする．$u > 0$ により $ru = Tu \gg 0$ であるから，$r > 0$ および $u \gg 0$ とならねばならない．

次に r の幾何的重複度が 1 であることを示そう．r に対するいまひとつの実固有ベクトルを v とする．すると $v + cu$ が非負ではあるが正ではないような実数 c を見出すことができる．$v + cu \neq 0$ であれば，それは r に対応する T の非負固有ベクトルであり，したがって上記の結果から正でなければならない．しかしこれは矛盾であるから，$v + cu = 0$ すなわち $v = -cu$ とならねばならない．このように，u と一次独立な，r に対応する固有ベクトルは存在しないのである．

さて $D = 0$ を証明しよう．これは (7.9) において，$m = 1$ を示しても同じことである．そこで $m \geqq 2$ と想定してみよう．すると (5.30) により，$(T - r)D^{m-2} = D^{m-1}$ である（$D^0 = P$ とおく）．ゆえに定理 7.2 の証明で用いた記号によると，$w = D^{m-2}v$ に対して $(T - r)w = u$ である．ここで r の幾何的重複度が 1 であることは既に示されたので，$u \gg 0$ を仮定してよいであろう．すると $(u, u^*) = ((T - r)w, u^*) = (w, (T^* - r)u^*) = 0$ が導かれる．しかしこれは $u \gg 0$ および $u^* > 0$ に矛盾する．

$D = 0$ は，代数的固有空間 $P\mathsf{X}$ が幾何的固有空間に合致することを意味する．それゆえ $\dim P = 1$ で r は単純である．

定理の最後の命題も，u^* を用いて証明することができる．$z > 0$ に対して $Tz = \mu z$ としてみよう．すると $\mu(z, u^*) = (Tz, u^*) = (z, T^*u^*) = r(z, u^*)$．しかるに $u^* \gg 0$ により，$(z, u^*) > 0$ であるから，$\mu = r$ とならねばならないのである．

3.　非負作用素の半群

任意の $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して e^{tT} は，t がすべての実または複素数にわたって変化するときは作用素の群を作り，また t が非負の実数に限定される場合

は半群を作ることを想起しよう((4.21b) および§6.11 を見よ).テイラー級数 (4.20) により,T が非負行列ならば,$t \geqq 0$ に対して e^{tT} もまた非負であることがわかる.しかし逆は正しくない.

非負半群の生成作用素を特徴づけるために,次の定義を導入しよう.すなわち行列 T のすべての非対角要素が非負 [正] であるとき,T は**本質的に非負** **[正]** と称するのである.

定理 7.4. $t > 0$ に対して e^{tT} が非負であるためには,T が本質的に非負であることが必要十分である.

証明 e^{tT} が非負であるとすれば,単位行列 1 の非対角要素はゼロであるから,$e^{tT}-1$ の非対角要素は非負である.かくして (4.21c) により,T は非負の非対角要素を有する.逆に,T が非負の対角要素をもつとすれば,実数 c が十分に大きいとき,$T+c$ は非負である.このとき $t>0$ に対して $e^{t(T+c)} = e^{ct}e^{tT}$ は非負である.ゆえに e^{tT} もまた非負である.

定理 7.5. T は本質的に非負とする.このとき T は次の性質を有する特別の固有値 $\lambda[T]$ を有する(今後これを**主固有値**,principal eigenvalueまたは**優固有値**,dominant eigenvalueと呼ぶ[2]).(a) $\lambda[T]$は実.(b) $\lambda[T]$ は非負の固有ベクトルを有する.他方,T のそれ以外の固有値は,いずれも正の固有ベクトルをもたない.(c) $\lambda[T]$ は T のそれ以外の固有値の実部よりも厳密に大きい.(d) $t>0$ に対して,$\mathrm{spr}e^{tT} = e^{t\lambda[T]}$.(e) とくに T が非負ならば,$\lambda[T] = \mathrm{spr}T$.

証明 $T+c$ が非負となるような実数 c を選ぶ.$\lambda[T] = \mathrm{spr}(T+c)-c$ とおけば,$\lambda[T]$ は c から独立で,しかも上記の諸条件(定理 7.2,7.4 を見よ)を満たすことが容易に知られる.T が固有値 λ_h,$h = 1, 2, \cdots, s$ をもつならば,e^{tT} は固有値 $e^{t\lambda_h}$ をもつことに注意しておこう.

問題 7.6. T が本質的に非負で消散的ならば(X はユニタリ空間であることを仮定する),$\lambda[T] \leqq 0$ である.

---

[2] 任意の作用素 T に対して,$\sup \mathrm{Re}\lambda$ を T の**スペクトル限界**(spectral bound) と定義する.ここで sup は $\lambda \in \Sigma(T)$ についてとるのである.このとき $\lambda[T]$ は T のスペクトル限界に一致する.

4. 既約行列

まずはじめに，定理 7.4 の部分的な精緻化を示しておこう．

定理 7.7. T は本質的に非負とする．このとき e^{tT} の行列要素は t の整函数である．$t \geqq 0$ に対して，e^{tT} の対角要素はゼロにならない．他方，非対角要素は，$t > 0$ に対して，恒等的にゼロであるか，あるいは厳密に正であるかのいずれかである．

証明 任意の $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して，e^{tT} の行列要素は t の整函数である．$e^{t(T+c)} = e^{ct}e^{tT}$ なる関係を考慮すれば，T が非負の場合について定理を証明すれば十分である．そこでテイラー展開 (4.20) によれば，e^{tT} の行列要素は非負の係数をもつ t の収束巾級数で，したがってそれらは $t \geqq 0$ の非減少実解析函数である．$e^{0T} = 1$ であるから，定理の主張はただちに導かれる．

本質的に非負な行列 T は，e^{tT} がすべての $t > 0$ に対して正であるとき，**既約**(irreducible) であるという．あるいは，“すべての $t > 0$ に対して” というかわりに，“e^{tT} がある $t > 0$ に対して” 正であるとき，といっても同じことである（定理 7.7 による）．それ以外の場合，T は**可約**(reducible) であるという．

T の可約性がその対角部分によらないことは明白である．T が既約であるためには，T^* が既約であることが必要十分である．T が既約で，S が T より小さくない（すなわち $S - T$ が非負）ならば，S は既約である．こうして T の可約性は，T の非対角要素のいずれが正で，いずれがゼロであるかにのみかかわっているのであってその大きさには無関係である．

問題 7.8. T を非負行列とし，ある整数 $m > 0$ に対して T^m が正であるとき，T はプリミティヴ(primitive) であるという．T がプリミティヴならば，それは既約である．

注意 7.9. 既約性という用語の起源は次のとおりである．非負行列 T が可約ならば，e^{tT} の行列要素のあるものは恒等的にゼロである．かくして，すべての $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，行列要素 $T^n(j_0, k_0) = 0$ となるような添数の組 (j_0, k_0) が存在する．添数の集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ を，次のような仕方でふたつの共通部分をもたない部分集合 J, K に分別する．つまり，$k \in \mathrm{K}$ ならばすべての n について $T^n(j_0, k) = 0$，また

$k \in \mathrm{J}$ ならばそうではないようにするのである．すると J と K はともに非空である．実際 $j_0 \in \mathrm{J}$, $k_0 \in \mathrm{K}$ となるからである．さて $j \in \mathrm{J}, k \in \mathrm{K}$ ならば必ず $T(j,k)=0$ が成り立つ．これを示すために，$T^n(j_0,j) \neq 0$ となるように n を選ぶ．すると $0 = T^{n+1}(j_0,k) = \sum_{h=1}^N T^n(j_0,h)T(h,k)$ であり，したがって $T(j,k)=0$ とならねばならない．こうして $k \in \mathrm{K}$ なる基底ベクトル e_k の張る $\mathbf{X}$ の部分空間は，T の下で不変であり，T はその意味で可約なのである．

e_j の番号をつけかえて，$\mathrm{K}=\{1,2,\cdots,s\}, \mathrm{J}=\{s+1,\cdots,N\}$ とすれば，行列 T は左下方の $(n-s)\times s$ のサイズの長方形の要素がすべてゼロとなる．換言すれば，T が可約であるためには，行と列の同時的な(simultaneous) 再配置によって，T をそのような形に変形できることが必要十分なのである．

定理 7.10.　T は本質的に非負で，しかも既約とする．このとき主固有値 $\lambda[T]$（定理 7.5 を見よ）は単純で，正の固有ベクトルを有する．非負の固有ベクトルをもつ固有値は，これ以外には存在しない．

証明　$\lambda_h, h=1,2,\cdots,s$ を T の固有値とし，それに対応する固有射影を P_h とする．このとき e^{tT} の固有値はちょうど $e^{t\lambda_h}$ であり，それには同一の固有射影 P_h が対応する．(ただし $e^{t\lambda_h}$ のいくつかが合致する場合は別であるが，そのような事態は $t>0$ を十分に小さく選ぶことによって回避することができる.) $t>0$ に対しては e^{tT} は正なので，$\mathrm{spr}(e^{tT})$ は e^{tT} の単純固有値で，正の固有ベクトル u を有する（定理 7.3）．これから $\mathrm{spr}(e^{tT})=e^{t\lambda[T]}$ であることと，$\lambda[T]$ は T の単純固有値で固有ベクトル $u \gg 0$ をもつことが導かれる（定理 7.5 を見よ）．定理の最後の命題は，e^{tT} の固有値のうち $\mathrm{spr}(e^{tT})$ 以外のものは非負固有ベクトルをもたないという事実から導かれる（定理 7.3）．

例 7.11.　(a)

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

はプリミティヴではないが既約である．$\lambda[T]=1$ で，それは固有ベクトル $(1,1,1)$ をもつ．

(b)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

は可約である．$\lambda[T]=2$ で，それは固有ベクトル $(2,1,1)$ を有する．他の固有値 $\lambda_2=1$ は非負の固有ベクトル $(1,0,0)$ を有する．第三の固有値 $\lambda_1=0$ は，いかなる非負の固有ベクトルももたない．

問題 7.12. T が本質的に非負で既約ならば，T^* も同様である．

5. 正値性と消散性

本節の冒頭に注意した如く，作用素が正であるという概念は，正値定符号性（あるいはより一般的に，消散性または増大性）とは全く独立なものである．前者は作用素の具体的な行列表現に関わることがらであり，それに対して後者は，土台となっている空間の距離の性質（ユニタリ構造）に関係する．それにもかかわらず，この二種の概念の間には，ある関係が存在するのである[3]．ここでは $\mathsf{X}=\mathsf{C}^N$ にユニタリ・ノルム (1.17) を導入し，また X^* を X と同一視して，明示的に X のユニタリ構造を利用する．

定理 7.13. T は本質的に非負でしかも既約，また $\lambda[T]$ をその主固有値とする．このとき $T-\lambda[T]$ は，固有値ゼロをもつある消散作用素と相似である．より厳密にいえば，要素が正の実対角行列 F を適当に選んで，$F^{-1}TF-\lambda[T]$ が消散的で単純固有値ゼロをもち，それは自己随伴固有射影 P を伴うようにすることができる．

証明 必要に応じて T に適当なスカラーを加え，T は非負と仮定してよい．すると T^* もまた非負既約で，T と T^* の双方が主固有値 $\lambda=\lambda[T]=\lambda[T^*]>0$ に対する正の固有ベクトルを有する．すなわち

$$(7.10)\quad Tu=\lambda u,\quad T^*f=\lambda f,\quad u=(\xi_j)\gg 0,\quad f=(\alpha_j)\gg 0\,.$$

そこで

---

[3] 二種の正値性は，ときとして相互に矛盾するように見える可能性があることに注意しておかねばならない．たとえば $T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ は本質的に正行列（したがって e^T は正）であるが，§6.5 の意味において $T\leqq 0$ である．たとえば $\mathrm{L}^2(\mathsf{R}^n)$ のような無限次元空間 X を考えると，ラプラシアン $T=\Delta=\partial^2/\partial \mathrm{x}_1^2+\cdots+\partial^2/\partial \mathrm{x}_n^2$ は同じ現象の典型的な事例となっている．

(7.11)
$$w = \left((\xi_j \alpha_j)^{1/2}\right) \gg 0, \quad F = \mathrm{diag}\left((\xi_j/\alpha_j)^{1/2}\right)$$

とおく（F は指示された対角要素をもつ対角行列である）．すると

(7.12)
$$u = F w, \quad f = F^{-1} w$$

であり，したがって (7.10) から

(7.13)
$$F^{-1} T F w = \lambda w, \quad F T^* F^{-1} w = \lambda w$$

が導かれる．

$B = F^{-1} T F$ とおけば，(7.13) により，B と B^* は同一の固有値 λ と同一の固有ベクトル w を有する．それゆえ B^*B は固有値 λ^2 とその固有ベクトル $w \gg 0$ を有する．B^*B は非負であるから，λ^2 は B^*B の主固有値でなければならない（定理 7.5 を見よ）．かくして λ^2 は自己随伴作用素 B^*B の最大の固有値で，したがって $\|B^*B\| = \lambda^2$ ((6.67) を見よ)．(6.25) により $\|B^*B\| = \|B\|^2$ であるから，

(7.14)
$$\|B\| = \lambda.$$

すると $\mathrm{Re}(Bx, x) \leqq \|Bx\|\|x\| \leqq \|B\|\|x\|^2 = \lambda\|x\|^2$ から $B - \lambda$ の消散性が導かれる（定理 6.47）．

B は T と相似であるから，定理 7.10 により，B の固有値 λ は単純である．そして定理 6.49 により，それに対応する固有射影は自己随伴である．

問題 7.14.　T が本質的に非負で $T^* = T$ ならば，(6.36) の意味において $T - \lambda[T] \leqq 0$.

第 2 章　有限次元の摂動論

本章では有限次元空間における線形作用素の摂動論を考察する．とくに作用素がひとつのパラメータに解析的に依存している場合に，作用素の変化に応じて固有値や固有ベクトル（あるいは固有射影）はいかに変化するか，これが主要な問題である．これは作用素が無限次元空間の中で働く，より一般的かつより興味深い問題の特殊ケースである．

有限次元の場合を切り離して論ずるには三重の理由があると思われる．まず第一に，それは自明なことではない．第二に，それは一般的な場合における摂動論のある特徴，とくに孤立的な固有値にかかわる特徴を本質的に具有していること．対象となっている空間の次元が無限であることから生ずる複雑さに煩わされずに，この単純化された設定の下でこれらの問題を扱うことには，それなりの利点があるのである．無限次元の場合に進む際に必要となる修正については，無限次元空間の摂動論に特有な諸特徴とともに，後の諸章に補遺として紹介している†．第三に，有限次元での理論は，たとえば行列の数値解析とのかかわりにおいて，それ自身の興味深い側面をもっていること．有限次元の問題に限って関心をもたれる読者は，一般論からそれを解きほぐすまでもなく，求めるものを本章の中に見出すことができるであろう．

上に述べたとおり，問題は決して自明なものではなく，それを解くための多くの異った方法が導入されてきた．ここで用いる方法はレゾルベントの函数論的な研究，とりわけ固有射影をレゾルベントの径路積分として表現する研究に基づくものである．一般的結果をひき出し，また摂動級数の収束率に関するさまざまな評価を導くためには，これが最も効率的な方法である．作用素値の函数に対して函数論を適用する途は，ある意味では全く初歩的ということはできない．しかし応用数学の学徒は概ね函数論に馴染みが深いことを考えれば，この形での説明が応用のために本書を利用して下さる読者の妨げにならないことを，著者としては期待しているのである．

§1. 固有値の解析的摂動

1. 問題

さて有限次元線形空間 X[1] における固有値問題の摂動論という，本書の本来の研究テーマに進むこととしよう．この理論のひとつの典型的な問題は，線形作用素 T がわずかな摂動にさらされるとき，T の固有値や固有ベクトル（あるいは固有空間）がいかに変化するかを研究すること，これである[2]．このような問題を扱う場合，次の形の作用素の族を考えることがしばしば便利である．

$$T(\kappa) = T + \kappa T'. \tag{1.1}$$

ここで κ は，十分に小さいことを仮定されるスカラーのパラメータである．$T(0) = T$ を**非摂動作用素** (unperturbed operator)，$\kappa T'$ を**摂動** (perturbation) と称する．すると $T(\kappa)$ の固有値や固有ベクトルが κ の巾級数として表現可能であるや否や，すなわちそれが $\kappa = 0$ の近傍において κ の正則な函数であるや否やという問が生ずる．この問が肯定的に答えられる場合は，小さな $|\kappa|$ に対しては，固有値や固有ベクトルの変化は摂動 $\kappa T'$ と同位の大きさを有することになるであろう．しかし以下で見るとおり，これがつねに成り立つわけではない．

(1.1) は

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)} + \kappa^2 T^{(2)} + \cdots \tag{1.2}$$

---

[1] 本節では $0 < \dim \mathsf{X} = N < \infty$ を仮定する．適宜，その都度注意するとおり，いくつかの結果は無限次元のバナッハ空間においても成り立つ．

[2] 有限次元における摂動の一般論については Baumgärtel【1】, [4-7], Davis [1, 3], Davis and Kahan [1], B. L. Livšic [1], Reed and Simon 【2】, Rellich[1, 8], Višik and Lyusternik [1, 3] を見よ．Baumgärtelの著書は，とくに解析的摂動論についての最も包括的な体系書である．数値解析に関心のある読者には Parlett【1】も有益である．また，無限次空間における解析的摂動を扱った基本的論文，著書としてあげておくべきものは，次のようである．Courant and Hilbert【1】, Dunford and Schwartz【1】, Friedrichs【1】, Porath [1, 2], Reed and Simon【2】, Rellich [1-7], Riesz and Sz.-Nagy【1】, Rosenbloom [1], Schäfke [3-5], Schröder [1-3], Šmul'yan [1], T. Kato [1,3,6].

の形式に一般化することができる．またより一般的に，複素 κ-平面のある領域 D_0 において正則な作用素値の函数 $T(\kappa)$ が与えられているものと想定してもよい[3].

$T(\kappa)$ の固有値は特性方程式（問題 I-5.16 を見よ）

$$\det(T(\kappa) - \zeta) = 0 \tag{1.3}$$

を満たす．これは次数 $N = \dim \mathsf{X}$ でしかも係数が κ について正則な，ζ に関する代数方程式である．この点は，X の基底 $\{x_j\}$ に関する $T(\kappa)$ の行列を用いて (1.3) を書き表わしてみれば，この行列の各要素が κ の正則な函数であることから了解される［I-(3.10) を見よ］．函数論におけるよく知られた結果[4]によれば，(1.3) の根は **代数特異点** (algebraic singularity) **のみを有する，κ の解析函数** (analytic function)（の分岐）である．より正確にいえば，$\kappa \in D_0$ に対する (1.3) の根は，D_0 の中に代数特異点のみを有する一個または複数個の解析函数の，一個または複数個の分岐を形づくるのである．

したがって $T(\kappa)$ の固有値の数は，κ のいくつかの特別な値を除けば，κ から独立な定数 s に等しい．D_0 の各コンパクト部分集合には，このような**例外点**(exceptional point) κ は有限個しか存在しない．これらの解析函数が（複数個あって）すべて異なる場合，この数 s は N に等しい．この場合 $T(\kappa)$ は単純で，したがってすべての非例外的な κ について対角化が可能である．他方，これらの解析函数の中に同一のものがあるとすれば，$s < N$ である．この場合，$T(\kappa)$ は**恒久退化的**(permanently degenerate) であるという．

例 1.1. 上に述べたさまざまな可能性を示す最も簡単な事例を集めておこう．これらの例は二次元空間 ($N = 2$) において (1.1) の形をもつ族 $T(\kappa)$ に関するものである．単純化のために $T(\kappa)$ と，ある基底に関するその行列表現とを同一視して考える．

---

[3] κ を実数値に限定することも可能である．しかし実数 κ について与えられた (1.2) はつねに複素数 κ に拡張できるから，複素数 κ を考えることで一般性が失われることはない．

[4] Knopp【2】p. 119 を見よ．ここでは代数函数が考察の対象となっている．実は (1.3) は ζ を**代数型** (algebroidal) 函数（必ずしも代数函数ではない）として定めるが，それは局所的には代数函数と類似している．(1.3) の詳しい函数論的取り扱いについては Baumgärtel【1】, [1] を見よ．

a)
$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & -1 \end{pmatrix}.$$

$T(\kappa)$ の固有値は

(1.4)
$$\lambda_{\pm}(\kappa) = \pm(1+\kappa^2)^{1/2}$$

であり，これは二重値の解析函数 $(1+\kappa^2)^{1/2}$ の分岐となっている．こうして $s = N = 2$ であり，例外点は $\kappa = \pm i$ で，$T(\pm i)$ は唯一の固有値 0 をもつ．

b)
$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad s = N = 2.$$

固有値は $\pm\kappa$ で，これらはふたつの相異なる κ の整函数である（特性方程式は $\zeta^2 - x^2 = 0$ で可約である）．例外点はひとつで，$\kappa = 0$ がそれである．これに対して $T(\kappa)$ は唯一の固有値 0 をもつ．

c)
$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 1.$$

$T(\kappa)$ は恒久退化的で，すべての κ に対して唯一の固有値は 0．つまりふたつの同一の解析函数ゼロを得，例外点は存在しない．

d)
$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

固有値は $\pm\kappa^{1/2}$ で，二重値の函数 $\kappa^{1/2}$ を形づくる．例外点はひとつで，$\kappa = 0$.

e)
$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

固有値は 0 と 1．例外点は存在しない．

f)
$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

固有値は 0 および κ で，これらはふたつの相異なる整函数である．例外点はひとつで，$\kappa = 0$ がそれである．

2.　固有値の特異点

さて $T(\kappa)$ の固有値をより詳しく検討しよう．これは一般には κ の多価解

析函数であるから，表記にあたっては若干の注意が必要である．κ を例外点を含まない基本領域 D_0 の単連結[5]な部分領域 D（簡単化のために，そのような領域を**単純部分領域**，simple subdomain と称する）に限定すれば，$T(\kappa)$ の固有値は

$$(1.5) \qquad \lambda_1(\kappa), \lambda_2(\kappa), \ldots, \lambda_s(\kappa)$$

と書くことができ，s 個の函数 $\lambda_h(\kappa)$, $h = 1, \cdots, s$ はすべて D において正則で，しかも $h \neq k$ に対しては $\lambda_h(\kappa) \neq \lambda_k(\kappa)$ である．

次に例外点のひとつの近傍における固有値の挙動を考察するが，一般性を失うことなく $\kappa = 0$ としてよいであろう．D を $\kappa = 0$ に近い小さな円板で，$\kappa = 0$ はこれに含まれぬものとする．$\kappa \in \mathrm{D}$ に対する $T(\kappa)$ の固有値は，(1.5) の形式をもつ s 個の正則函数として表現することができる．$\kappa = 0$ の周囲で D を連続的に動かすと，これらの s 個の函数は解析的に延長することができる．D を $\kappa = 0$ の周囲に一回転させたのち元の位置に戻すと，s 個の函数 (1.5) は，それ自身の間に置換をひきおこす．したがってこれらの函数は

$$(1.6) \qquad \{\lambda_1(\kappa), \ldots, \lambda_p(\kappa)\}, \ \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$$

という具合にグループ分けし，各グループは上記の如き D の回転による巡回置換をひきおこすようにすることができる．簡単化のために，各グループを例外点 $\kappa = 0$ における**サイクル** (cycle) と呼ぶことにしよう．そしてひとつのサイクルの元の数をその**周期** (period) と呼ぶ．

周期 p のサイクルの元は，($p \geqq 2$ の場合）$\kappa = 0$ において分岐点をもつ，($\kappa = 0$ の近傍で定義された）ある解析函数の分岐を形づくる．そして $\omega = \exp(2\pi i/p)$ とおけば，次のような**ピュイズー級数** (Puiseux series) が得られる[6]．

$$(1.7) \qquad \lambda_h(\kappa) = \lambda + \alpha_1 \omega^h \kappa^{1/p} + \alpha_2 \omega^{2h} \kappa^{2/p} + \cdots, \qquad h = 0, 1, \ldots, p-1.$$

ここには $\kappa^{1/p}$ の負の巾をもつ項は現われていないことに注意しなければな

[5] Knopp【1】, p. 19 を見よ．
[6] Knopp【2】, p. 130 を見よ．

らない．なぜなら，(1.3) の最高巾 ζ^N の係数は $(-1)^N$ であり，したがって $\lambda_h(\kappa)$ は $\kappa=0$ において連続となるからである[7]．$\lambda=\lambda_h(0)$ を，考察の対象になっているサイクルの**中心**(center) と呼ぶ．

(1.7) によれば，$h=1,\cdots,p$ に対して，小さな $|\kappa|$ については，一般に $|\lambda_h(\kappa)-\lambda|$ が $|\kappa|^{1/p}$ と同位の大きさをもつことがわかる．したがって $p\geqq 2$ ならば，周期 p をもつサイクルの固有値の，例外点における変化率は，$T(\kappa)$ そのものの変化に比べて無限に大きいのである[8]．

問題 1.2.　ひとつのサイクルに属する $\lambda_h(\kappa)$ の和は，当該の例外点において正則である．

一般に，同一の中心 λ をもつ複数個のサイクルが存在する．中心 λ のサイクルに属するすべての固有値 (1.7) は，$\kappa=0$ における**分裂** (splitting) によって摂動なしの固有値 λ から乖離するという．これらの固有値の集合は，小さな $|\kappa|$ については λ の周囲に凝集していることから，**λ-群**(λ-group) と称せられる．

注意 1.3.　例外点は必ずしも固有値のいくつかを表現する解析函数の分岐点になっているわけではない．換言すれば，例外点 $\kappa=\kappa_0$ におけるサイクルがすべて周期 1 であるという事態がありうるのである．しかしいずれにせよ，$\kappa\neq\kappa_0$ に対するあるふたつの相異なる固有値は，$\kappa=\kappa_0$ において合致しなければならない（例外点の定義による）．このように，例外点においては（そして例外点においてのみ）必ず分裂が生ずるのである．

例 1.4.　例 1.1 に挙示した諸例を考えてみよう．a) では，例外点 $\kappa=\pm i$ において，周期 2 のサイクルが得られる．また d) では，$\kappa=0$ において同様となる．b) および f) では，$\kappa=0$ において周期 1 のサイクルがふたつ存在する．また c) と e) では，例外点は存在しない．

3.　レゾルベントの摂動

$T(\kappa)$ のレゾルベント

---

[7] Knopp【2】, p. 122 を見よ．

[8] この事実は，行列の固有値の数値解析においてある重要性をもっている．

$$R(\zeta,\kappa) = (T(\kappa) - \zeta)^{-1} \tag{1.8}$$

は，$T(\kappa)$ のどの固有値にも等しくない ζ のすべてに対して定義され，$\kappa \in \mathrm{D}_0$ をひとつ固定したとき，ζ の有理型函数となる．実際，次の定理が得られる．

定理 1.5. ζ が $T(\kappa)$ のどの固有値にも等しくないような各領域において，$R(\zeta,\kappa)$ は二変数 ζ, κ についての正則な函数である．

証明. $\zeta = \zeta_0$, $\kappa = \kappa_0$ がそのような領域に属するものとしよう．一般性を失うことなく，$\kappa_0 = 0$ と想定してよい．こうすると ζ_0 は $T(0) = T$ のいかなる固有値にも等しくなく，

$$\begin{aligned} T(\kappa) - \zeta &= T - \zeta_0 - (\zeta - \zeta_0) + A(\kappa) \\ &= \left[1 - \left(\zeta - \zeta_0 - A(\kappa)\right) R(\zeta_0)\right] (T - \zeta_0), \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$A(\kappa) = T(\kappa) - T = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n T^{(n)} \tag{1.10}$$

である．ここで $R(\zeta) = R(\zeta,0) = (T - \zeta)^{-1}$ であり，また $\kappa = 0$ における $T(\kappa)$ の，(1.2) の形式におけるテイラー展開を想定している．したがって $[\quad]^{-1}$ で表わされる因子が，収束ノイマン級数によって定義されるならば，

$$R(\zeta,\kappa) = R(\zeta_0)\left[1 - \left(\zeta - \zeta_0 - A(\kappa)\right) R(\zeta_0)\right]^{-1} \tag{1.11}$$

が存在する（例 I-4.5 を見よ）．この条件はたとえば

$$|\zeta - \zeta_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |\kappa|^n \|T^n\| < \|R(\zeta_0)\|^{-1} \tag{1.12}$$

である場合に成り立つ．なぜなら $|\zeta - \zeta_0| + \|A(\kappa)\|$ は (1.12) の左辺を超えることはないからである．十分に小さな $|\zeta - \zeta_0|$ および $|\kappa|$ に対しては，確かにこの不等式が成り立ち，このときには (1.11) の右辺は，$\zeta - \zeta_0$ および κ に関する二重巾級数として表現することができる．これから，$\zeta = \zeta_0$, $\kappa = 0$ の近傍において，$R(\zeta,\kappa)$ は ζ と κ に関する正則函数であることが知られる．

後の利用に供するために，$R(\zeta,\kappa)$ を係数が ζ に依存する，κ の巾級数として書き表わしておくのが一層便利であろう．(1.11) において $\zeta_0 = \zeta$ とお

けば，次の関係が得られる．

$$(1.13)\quad R(\zeta,\kappa)=R(\zeta)\left[1+A(\kappa)R(\zeta)\right]^{-1}=R(\zeta)\sum_{p=0}^{\infty}\left[-A(\kappa)R(\zeta)\right]^{p}=R(\zeta)+\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^{n}R^{(n)}(\zeta).$$

ここで

$$(1.14)\quad R^{(n)}(\zeta)=\sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_p=n\\ \nu_j\geqq 1}}(-1)^{p}R(\zeta)T^{(\nu_1)}R(\zeta)T^{(\nu_2)}\cdots T^{(\nu_p)}R(\zeta)$$

であり，右辺の和は $1\leqq p\leqq n, \nu_1+\cdots+\nu_p=n$ なる正整数 p と $\nu_1,\cdots,\nu_p$ とのあらゆる組み合わせについてとるのである．

(1.13) をレゾルベントの**第二ノイマン級数** (second Neumann series) と呼ぶ．Γ を $T=T(0)$ のレゾルベント集合 $\mathrm{P}(T)$ のコンパクト部分集合とすれば，十分に小さな κ と $\zeta\in\Gamma$ に対して，第二ノイマン級数は一様収束である．これは $\zeta_0=\zeta$ とすれば (1.12) から導かれる．ここで $\|R(\zeta)\|^{-1}$ は $\zeta\in\Gamma$ に対して正の最小値をとる．

定理 1.5a.　定理 1.5 における ζ を固定して考えると，次の二命題のいずれか一方が成り立つ．i) いかなる $\kappa\in\mathrm{D}_0$ に対しても $R(\zeta,\kappa)$ は存在しない．ii) $R(\zeta,\kappa)$ は $\kappa\in\mathrm{D}_0$ について有理型である．(したがって孤立点を除くすべての κ に対して $R(\zeta,\kappa)$ が存在する．)

証明.　κ について恒等的に $\det\big(T(\kappa)-\zeta\big)=0$ ならば，i) のケースが成り立つ．そうでない場合は，$R(\zeta,\kappa)$ の行列表現から，容易に ii) が導かれる．$R(\zeta,\kappa)$ の行列の要素は，$T(\kappa)-\zeta$ の行列要素に現われる多項式を，κ について正則な $\det\big(T(\kappa)-\zeta\big)$ で除したものであることに注意しよう．

例 1.6.　例 1.1, a) における $T(\kappa)$ のレゾルベントは

$$(1.15)\qquad R(\zeta,\kappa)=(\zeta^2-1-\kappa^2)^{-1}\begin{pmatrix}-1-\zeta & -\kappa\\ -\kappa & 1-\zeta\end{pmatrix}$$

で与えられる．

問題 1.7.　例 1.1 における b) から f) の $T(\kappa)$ に対するレゾルベントを求めよ．

4.　固有射影と固有巾零作用素の摂動

λ を $T = T(0)$ の固有値のひとつで，重複度[9]を m とする．Γ は λ を内部に含み，T の他の固有値は含まない，レゾルベント集合 $\mathrm{P}(T)$ における正の向きを有する閉曲線 (たとえば円) とする．上で注意したとおり，十分に小さな $|\kappa|$ に対して，第二ノイマン級数 (1.13) は，$\zeta \in \Gamma$ について一様に収束する．$\zeta \in \Gamma$ に対して $T(\kappa)$ のレゾルベント $R(\zeta, \kappa)$ が存在することから，Γ 上には $T(\kappa)$ の固有値が全く存在しないことがわかる．

作用素

$$P(\kappa) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\zeta, \kappa)\, d\zeta^{10}. \tag{1.16}$$

は射影であり，Γ の内部にある $T(\kappa)$ のすべての固有値に対する固有射影の和に等しい（問題 I-5.9 を見よ）．とくに $P(0) = P$ は T の固有値 λ に対する固有射影と一致する．(1.13) を項別に積分して，次の関係を得る．

$$P(\kappa) = P + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n P^{(n)}, \tag{1.17}$$

ここで

$$P^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R^{(n)}(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{1.18}$$

級数 (1.17) は小さな $|\kappa|$ に対して収束し，したがって $P(\kappa)$ は $\kappa = 0$ の近傍において正則である．補題 I-4.10 により，$P(\kappa)$ の像 $\mathsf{M}(\kappa)$ は，T の固有値 λ に対する（代数的）固有空間 $\mathsf{M} = \mathsf{M}(0) = P\mathsf{X}$ と同型である．そして

---

9 とくに断わらない限り,「重複度」という用語は**代数的** (algebraic) 重複度を意味するものとする．

10 この積分公式は本書をつうじて基本的な役割を果たす．摂動論において最初にこの公式を用いたのは，Sz.-Nagy[1] および T.Kato[1] だが，それはさらに溯って Rellich[1]-[5] の考案した方法を大幅に単純化したものである．

とくに

$$\dim P(\kappa) = \dim P = m \tag{1.19}$$

である．

(1.19) は十分に小さなすべての $|\kappa|$ について成り立つので，Γ の内側にある $T(\kappa)$ の固有値は，正確に λ-群を形づくる．簡単化のために，$P(\kappa)$ をこの λ-群に対する**全射影** (total projection)，$\mathsf{M}(\kappa)$ を**全固有空間** (total eigenspace) と呼ぶことにする．

$\kappa = 0$ が例外点でない場合は，問題の固有値 λ の $\kappa = 0$ における分裂は存在しない．この場合は，λ の近傍には $T(\kappa)$ の固有値 $\lambda(\kappa)$ はちょうどひとつだけで，$P(\kappa)$ はそれ自体がこの固有値 $\lambda(\kappa)$ に対する固有射影となっている．(1.19) から，$\lambda(\kappa)$ の重複度は m に等しいことが知られる．$\kappa = 0$ を他の任意の非例外点 $\kappa = \kappa_0$ で置き換えれば，同様の結果が成り立つ．

さて κ-平面の単純部分領域 D および $\kappa \in \mathrm{D}$ に対する $T(\kappa)$ の固有値の集合 (1.5) を考えることとし，また $P_h(\kappa)$ を固有値 $\lambda_h(\kappa)$, $h = 1, \cdots, s$ に対する固有射影とする．いま証明した結果によると，各 $P_h(\kappa)$ は D において正則で，また各 $\lambda_h(\kappa)$ は一定の重複度 m_h を有する．ここで D が単純である（例外点を含まぬ）ことが本質的である．実際，たとえば $\lambda_1(\kappa_0) = \lambda_2(\kappa_0)$ であるとすれば，$P_1(\kappa_0)$ は定義すらされないのである．このような事態は κ_0 が例外点である場合に生じうる．

$\mathsf{M}_h(\kappa) = P_h(\kappa)\mathsf{X}$ を固有値 $\lambda_h(\kappa)$ に対する $T(\kappa)$ の（代数的）固有空間としよう．すると次の関係が得られる［I-(5.34) を見よ］．

$$\mathsf{X} = \mathsf{M}_1(\kappa) \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}_s(\kappa), \tag{1.20}$$

$$\dim \mathsf{M}_h(\kappa) = m_h, \quad \sum_{j=1}^{s} m_h = N, \quad \kappa \in \mathrm{D}.$$

固有値 $\lambda_h(\kappa)$ に対する固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ は，$\kappa \in \mathrm{D}$ についてやはり正則である．なぜなら，I-(5.26) により，

$$D_h(\kappa) = \big(T(\kappa) - \lambda_h(\kappa)\big)\ P_h(\kappa) \tag{1.21}$$

が成り立つからである．

作用素 $P_h(\kappa)$ および $D_h(\kappa)$ の構造には，顕著な安定性がある．

h を固定して考えると，そのおのおのについて $\dim M_h(\kappa) = m_h$ は一定で，しかも相異なる $\kappa \in \mathrm{D}$ に対する $M_h(\kappa)$ は互いに同型である．それゆえ $P_h(\kappa)$ は互いに相似（I-§4.6 を見よ），すなわち $U_h(\kappa)^{-1}P_h(\kappa)U_h(\kappa) = P_h(\kappa_0)$ を満たす非特異な作用素 $U_h(\kappa)$ が存在する．ここで $\kappa_0 \in \mathrm{D}$ は固定された一点である．

少なくとも単純な部分領域 D においては，$U_h(\kappa)$ は κ について正則であるように選びうることが知られている．その証明はそれほど簡単ではなく，後にこれを示すことにしたい（§4 を見よ）．

$D_h(\kappa)$ の構造も殆ど同様に安定的であって，次の結果が得られる[11]．

定理 1.7a.　（ジョルダン標準形の安定性）固定された h のおのおのについて，相異なる κ に対する $D_h(\kappa)$ は，ある孤立集合に属する κ を除いて，互いに相似である．さらにこの相似関係はある有理型作用素函数 $V_h(\kappa)$ をつうじて，$V_h(\kappa)^{-1}D_h(\kappa)\,V_h(\kappa) = D_h(\kappa_0)$ の如く達せられる．また $V_h(\kappa)$ あるいは $V_h(\kappa)^{-1}$ が上記の例外点において極を有する．

定理 1.7a には（新しい種類の）例外点が現われているが，これは一般に避けることができない．例 1.1, c) の $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が簡単な例になっている．$T(\kappa)$ 自身が巾零で，固有値 $\lambda(\kappa) = 0$ に対する固有巾零作用素 $D(\kappa)$ に合致する．固有射影は $P(\kappa) = 1$ である．（後に掲げる例 1.12, c) を見よ.）$V^{-1}(\kappa)D(\kappa)V(\kappa)$ を一定とするような一般的な $V(\kappa)$ は，（スカラー項を除いて）$V(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1/\kappa \end{pmatrix}$ の形式を有する．$V(\kappa)$ のスカラー項を調整して，$V(\kappa)$ および $V(\kappa)^{-1}$ の双方から $\kappa = 0$ における極を除去することは不可能である．実際，$D(0)$ は $\kappa \neq 0$ に対する $D(\kappa)$ とは相似にならないのである．

定理 1.7a の証明は簡単である．正則な行列要素をもつ巾零行列 $D_h(\kappa)$ に対して，I-§1.4 で概説したジョルダン標準形の構成法を繰り返すだけでよいのである．この操作を体系化するためには，**D におけるすべての有理型函数**

[11] これらの結果は Baumgärtel [5] によって証明された.（【1】をも見よ.）

のつくる体 M 上の線形空間 X_M およびそれと関連して，M に要素をもつ行列という概念を導入するのが便利である．上記の構成法は線形演算だけを用いているので，M の中に要素をもつ巾零行列 D_M と見なされる $D_h(\kappa)$ にそのまま適用することができる．こうして X_M に適当な新しい基底を導入することにより，D_M を I-(3.30) の形にすることができる．これは結局，次のような非特異作用素 $V_h(\kappa)$ の存在を主張することに帰着する．すなわち $V_h(\kappa)^{-1}D_h(\kappa)V_h(\kappa)$ が κ から独立で，I-(3.30) の特別な形の行列をもち，さらに κ に有理型的に依存する作用素がこれである．$V_h(\kappa)$ あるいは $V_h(\kappa)^{-1}$ の極は定理に述べられた例外点である[12].

5. 固有射影の特異点

さて例外点の近傍における固有射影 $P_h(\kappa)$ の挙動を考察することにしよう．ここで例外点は再び $\kappa = 0$ であることを想定する．既に示したとおり，T の各固有値 λ は一般に，$\kappa \neq 0$ に対する $T(\kappa)$ のいくつかの固有値に分裂する．しかし対応する全射影は $\kappa = 0$ において正則である［(1.17) を見よ］．第2項で考察した $\kappa = 0$ の近くにある小円板 D を再びここでとり上げてみよう．上に示したとおり，固有値 $\lambda_h(\kappa)$，固有射影 $P_h(\kappa)$，および固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ は $\kappa \in \mathrm{D}$ について定義され，しかも正則である．やはり第2項で述べた方法で D を $\kappa = 0$ の周囲に回転させて初期の位置に戻すとき，族 $\{\lambda_h(\kappa)\}$, $\{P_h(\kappa)\}$, $\{D_h(\kappa)\}$ のそれぞれは解析接続による置換に従う．そしてこの置換は三つの族について同一でなければならず，これは次のような考察によって確かめられる．

$T(\kappa)$ のレゾルベント $R(\zeta,\kappa)$ は部分分数による表現

$$(1.22)\qquad R(\zeta,\kappa) = -\sum_{h=1}^{s}\left[\frac{P_h(\kappa)}{\zeta-\lambda_h(\kappa)} + \frac{D_h(\kappa)}{(\zeta-\lambda_h(\kappa))^2}\right.$$

---

[12] 同様の議論により，$U_h(\kappa)^{-1}P_h(\kappa)U_h(\kappa) = P_h(\kappa_0)$ のような有理型函数 $U_h(\kappa)$ の存在を示すことができる．しかし $U_h(\kappa)$ は正則に選びうることが知られているのであるから，これは満足のいく結果ではない．実際，$U_h(\kappa)$ および $U_h(\kappa)^{-1}$ からは，その極を除去することができるのである．(§4.4, 4.9 を見よ．)

$$+\cdots+\frac{D_h(\kappa)^{m_h-1}}{(\zeta-\lambda_h(\kappa))^{m_h}}\Bigg]$$

を有する［I-(5.23) を見よ］．ここで ζ は T のスペクトルから幾分かの距離があることを仮定し，したがって考えるすべての κ について $\zeta\in \mathrm{P}(T(\kappa))$ である．$\lambda_1(\kappa),\cdots,\lambda_p(\kappa)$ が固有値のサイクル（第2項を見よ）を形づくるとき，上に述べた置換は，$1\leqq h\leqq p-1$ に対しては $\lambda_h(\kappa)$ を $\lambda_{h+1}(\kappa)$ に移し，また $\lambda_p(\kappa)$ を $\lambda_1(\kappa)$ に移す．しかし $R(\zeta,\kappa)$ は考えている解析接続によって不変でなければならないから，この置換は，$1\leqq h\leqq p-1$ に対しては $P_h(\kappa)$ を $P_{h+1}(\kappa)$ へ移し，$P_p(\kappa)$ を $P_1(\kappa)$ へ移す[13]．ある $h\neq k$ に対して $P_h(\kappa)=P_k(\kappa)$ となる可能性は，$P_h(\kappa)P_k(\kappa)=\delta_{hk}P_h(\kappa)$ なる性質によって排除されている．ある $D_h(\kappa)$ の組が一致する可能性［実際，すべての $D_h(\kappa)$ がゼロとなりうる］を除けば，(1.21) により，同種の結果が固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ に対して成り立つ．

さて $P_h(\kappa)$ と $D_h(\kappa)$ がたかだか代数特異点を有するにすぎないことを示そう．$D_h(\kappa)$ は (1.21) によって与えられるから，$P_h(\kappa)$ についてこれを証明すれば十分である．この目標に向かうために，まず

$$\|P_h(\kappa)\|=\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h(\kappa)}R(\zeta,\kappa)\,d\zeta\right\| \leqq \varrho_h(\kappa)\max_{\zeta\in\Gamma_h(\kappa)}\|R(\zeta,\kappa)\| \tag{1.23}$$

に注意しよう．ここで $\Gamma_h(\kappa)$ は $\lambda_h(\kappa)$ を囲み，他のすべての $\lambda_k(\kappa)$ を除外する円であり，また $\varrho_h(\kappa)$ は $\Gamma_h(\kappa)$ の半径を表わす．他方，I-(4.12) から，次の関係を得る．

$$\begin{aligned}\|R(\zeta,\kappa)\|&=\left\|\left(T(\kappa)-\zeta\right)^{-1}\right\|\\&\leqq\gamma\,\|T(\kappa)-\zeta\|^{N-1}/\left|\det\left(T(\kappa)-\zeta\right)\right|\\&\leqq\gamma\left(\|T(\kappa)\|+|\zeta|\right)^{N-1}\Big/\prod_{k=1}^{s}|\zeta-\lambda_k(\kappa)|^{m_k},\end{aligned} \tag{1.24}$$

[13] これは ζ の函数として $R(\zeta,\kappa)$ の部分分数表現が一意的であることによる．同種の議論が I-§5.4 でも使われている．

ここで γ は用いられるノルムにのみ依存する定数である．したがって

(1.25)
$$\|P_h(\kappa)\| \leqq \gamma\,\varrho_h(\kappa) \max_{\zeta\in\Gamma_h(\kappa)} \big(\|T(\kappa)\|+|\zeta|\big)^{N-1} \Big/ \prod_{k=1}^{s} |\zeta-\lambda_k(\kappa)|^{m_k}.$$

再び $\kappa=0$ が例外点であることを仮定し，$\kappa\to 0$ と想定してみよう．すると円 $\Gamma_h(\kappa)$ が $\lambda_h(\kappa)$ を囲み，他のいかなる $\lambda_k(\kappa)$ も除外するようにするためには，より小さな $|\kappa|$ に対しては $\Gamma_h(\kappa)$ をより小さく選ばねばならない．なぜなら λ-群の $\lambda_k(\kappa)$ は限りなく $\lambda_h(\kappa)$ に近づくからである．しかしすべての $\lambda_k(\kappa)$ は $\kappa=0$ においてたかだか代数特異点をもつにすぎない［(1.7) を見よ］から，$\kappa\to 0$ に対してこれらの固有値間の距離 $|\lambda_h(\kappa)-\lambda_k(\kappa)|$ は，たかだかある明確な $|\kappa|$ の分数巾と同位の大きさでゼロに収束することをわれわれは知っている．したがって適当な $\alpha>0$ により $\varrho_h(\kappa)=|\kappa|^\alpha$ と定義すれば，$\zeta\in\Gamma_h(\kappa)$ に対して $\Pi\,|\zeta-\lambda_k(\kappa)|^{m_k} \geqq \gamma'|\kappa|^{\alpha N}$ を成り立たしめる定数 $\gamma'>0$ が存在する．すると

$$\|P_h(\kappa)\| \leqq \text{const.}\ |\kappa|^{-(N-1)\alpha} \tag{1.26}$$

が得られる．こうして $P_h(\kappa)$ が $\kappa^{1/p}$ についてのローラン級数で表現されるときには，主部は有限であることが示されるのである．

これらの結果を要約すれば次のようである．

定理 1.8. $T(\kappa)$ の固有値 $\lambda_h(\kappa)$，固有射影 $P_h(\kappa)$ および固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ は，ある例外点（必ずしもすべての例外点ではない）において代数特異点のみをもつ，$\kappa\in \mathrm{D}_0$ についての解析函数（の分岐）である．$\lambda_h(\kappa)$ と $P_h(\kappa)$ はすべての分岐点を（分岐点の位数を含めて）共有し，これらは $D_h(\kappa)$ の分岐点となっている場合も，そうでない場合もある．とくに例外点 $\kappa=\kappa_0$ の近傍で $\lambda_h(\kappa)$ が一価（周期 1 のサイクル）の場合には，$P_h(\kappa)$ と $D_h(\kappa)$ もまた，そこでは一価である．

6.　注意と例

$P_h(\kappa)$, $D_h(\kappa)$ は $\lambda_h(\kappa)$ とともに代数特異点を有するが，特異点におけるそ

の挙動にはいくつかの重要なちがいがある．荒削りないい方をすると，$P_h(\kappa)$ および $D_h(\kappa)$ は $\lambda_h(\kappa)$ よりも強い特異性を有するのである．

これらの特異点は例外点になっていることを想起しておこう．ただしその逆は成り立たない．既に注意したように，$\lambda_h(\kappa)$ は例外点においてさえ連続であり，したがって極は存在しない．しかし一般に $P_h(\kappa)$ と $D_h(\kappa)$ は，例外点においては定義されない．とくにそれらは一価ではあるが，例外点において極をもつ場合があるのである（以下の例 1.12 を見よ）．

なお一層注目すべきは次の定理である[14]．

定理 1.9. $\kappa=\kappa_0$ が $\lambda_h(\kappa)$ の（したがってまた $P_h(\kappa)$ の）位数 $p-1\geqq 1$ の分岐点とするならば，$P_h(\kappa)$ はこの点で極を有する．すなわち巾 $(\kappa-\kappa_0)^{1/p}$ についての $P_h(\kappa)$ のローラン展開は必ず負の巾を含む．とくに $\kappa\to\kappa_0$ に対しては $\|P_h(\kappa)\|\to\infty$ が成り立つ．

証明. 仮りにこれが成り立たないものと想定してみよう．また

$$P_h(\kappa)=P_h+\kappa^{1/p}P'_h+\cdots,\quad h=1,\ldots,p$$

を，考察の対象となっているサイクルに属する $P_h(\kappa)$ のピュイズー級数とする．ここで再び単純化のために $\kappa_0=0$ と仮定する．κ を $\kappa=0$ の周囲に回転せしめると，$1\leqq h\leqq p-1$ に対しては $P_h(\kappa)$ は $P_{h+1}(\kappa)$ へ移され，また $P_p(\kappa)$ は $P_1(\kappa)$ へ移される．それゆえ，$1\leqq h\leqq p-1$ については $P_{h+1}=P_h$ とならねばならない．他方，$\kappa\to 0$ に対して $P_h(\kappa)P_{h+1}(\kappa)=0$ なる関係から $P_hP_{h+1}=0$ が導かれ，$P_h(\kappa)$ の巾等性から $P_h^2=P_h$ を得る．したがって $P_h=P_h^2=P_hP_{h+1}=0$．しかし $\dim P_h(\kappa)\mathsf{X}=m_h>0$ という事実からは $\|P_h(\kappa)\|\geqq 1$ が導かれ（問題 I-4.1 を見よ），上記の帰結はこれに矛盾する．

$\lambda_h(\kappa)$ に対する分岐点 $\kappa=\kappa_0$ の位数 $p-1$，あるいは同じことであるが，サイクル $\{\lambda_1(\kappa),\cdots,\lambda_p(\kappa)\}$ の周期 p については，次の結果が得られる．すなわち **T の重複度 m の固有値 λ は，位数が $m-1$ より大きな分岐点を生じさせることはない．** これはそのような固有値が m 個以上の固有値に

[14] この定理は Butler [1] による．

分裂することはありえないという事実からの，明白な帰結である［(1.19) を見よ］．

定理 1.10.　X をユニタリ空間とする．$\kappa_0 \in \mathrm{D}_0$（例外点も許す）とし，$\{\kappa_n\}$ は κ_0 に収束し，しかも $T(\kappa_n)$, $n = 1, 2, \cdots$ が正規であるような点列とする．このときすべての $\lambda_h(\kappa)$ と $P_h(\kappa)$ は $\kappa = \kappa_0$ において正則であり，また $D_h(\kappa) = 0$ が恒等的に成り立つ．

証明.　$T(\kappa_n)$ が正規であることから，$\|P_h(\kappa_n)\| = 1$ が成り立つ［I-(6.64) を見よ］．こうして定理 1.9 により，$\kappa = \kappa_0$ は，どの $\lambda_h(\kappa)$ についても分岐点ではない．したがって $\lambda_h(\kappa)$ は $\kappa = \kappa_0$ において正則である．すると $P_h(\kappa)$ はそこでは一価となり，それらは上記と同様の理由で極をもちえないから，正則とならねばならない．そこで正則な函数 $D_h(\kappa) = (T(\kappa) - \lambda_h(\kappa))P_h(\kappa)$ が $\kappa = \kappa_n \to \kappa_0$ において消えることに鑑れば，$D_h(\kappa)$ は恒等的にゼロとなる．

注意 1.11.　一般に $P_h(\kappa)$, $D_h(\kappa)$ は例外点 κ_0 では定義されない（しかし定理 1.10 におけるように，それらは κ_0 において除去可能な特異点をもつ可能性がある．そのような場合，$P_h(\kappa_0)$ と $D_h(\kappa_0)$ は曖昧さをとどめずに定義されるけれども，$T(\kappa_0)$ の固有値 $\lambda_h(\kappa_0)$ に対する固有射影，固有巾零作用素になっているとは限らない．たとえば $\lambda_1(\kappa_0) = \lambda_2(\kappa_0) \neq \lambda_k(\kappa_0)$, $k \geqq 3$ とすれば，$P_1(\kappa_0) + P_2(\kappa_0)$ が $\lambda_1(\kappa_0)$ に対する固有射影となる（$P_1(\kappa_0)$ はそうではない）．そしてまた，$\lambda_h(\kappa_0)$ に対する固有巾零作用素は，たとえ $D_h(\kappa) \equiv 0$ であるとしても消えるとは限らない．それは以下に示す例 1.12 a)，d)，f) に見るとおりである．

例 1.12.　例 1.1 の作用素に対する $T(\kappa)$ の固有射影と，固有巾零作用素を考えてみよう．

a)　レゾルベント $R(\zeta,\kappa)$ は (1.15) で与えられ，これを $\lambda_\pm(\kappa)$ の周囲の小円周に沿って積分すれば，(1.16) により，

$$(1.27)\quad P_\pm(\kappa) = \pm\frac{1}{2(1+\kappa^2)^{1/2}}\begin{pmatrix} 1 \pm (1+\kappa^2)^{1/2} & \kappa \\ \kappa & -1 \pm (1+\kappa^2)^{1/2} \end{pmatrix}$$

となる．読者は $P_\pm(\kappa)^2 = P_\pm(\kappa)$ および $P_+(\kappa)P_-(\kappa) = P_{-1}(\kappa)P_+(\kappa) = 0$ という関係の成り立つことを確認していただきたい．固有射影 $P_\pm(\kappa)$ は分岐点 $\kappa = \pm i$ をもつ，二重値代数函数の分岐である．$s = N = 2$ であるから，$T(\kappa)$ は単純で，$\kappa \neq \pm i$ に対して固有巾零作用素 $D_\pm(\kappa)$ はゼロである．例外点 $\kappa = \pm i$ においては，$T(\kappa)$ のスペクトル表現はきわめて異ったものとなる．二重固有値 0 が存在し，$T(\pm i)$ のスペクトル表現は

$$T(\pm i) = 0 + D_\pm \tag{1.28}$$

となる．つまり $T(\pm i)$ は，それ自体が固有巾零作用素なのである．

b) a) の場合と同様にレゾルベントを積分すると，固有値 $\lambda_1(\kappa) = \kappa$, $\lambda_2(\kappa) = -\kappa$ に対する固有射影

$$P_1(\kappa) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2(\kappa) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

が得られる．$\kappa \neq 0$ に対しては，ここでもまた $D_1(\kappa) = D_2(\kappa) = 0$ となる．例外点 $\kappa = 0$ は，$\lambda_h(\kappa)$，$P_h(\kappa)$ あるいは $D_h(\kappa)$ のいずれに対しても特異点ではない．

c) $T(\kappa)$ の唯一の固有値 $\lambda(\kappa) = 0$ に対する固有射影，固有巾零作用素は $P(\kappa) = 1$, $D(\kappa) = T(\kappa)$ で与えられる．

d) $\lambda_\pm(\kappa) = \pm\kappa^{1/2}$ に対しては

$$P_\pm(\kappa) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm\kappa^{-1/2} \\ \pm\kappa^{1/2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D_\pm(\kappa) = 0, \quad \kappa \neq 0 \tag{1.30}$$

である．例外点 $\kappa = 0$ は固有値と固有射影に対する分岐点である．$\kappa = 0$ に対しては，固有値はゼロであり，また $D = T = T(0)$ とすればスペクトル表現は $T(0) = 0 + D$ となる．この例の作用素は a) の作用素と似ているが，この場合は例外点がただひとつ存在することが異っている．

e) $\lambda_1(\kappa) = 1$, $\lambda_2(\kappa) = 0$ に対しては

$$P_1(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_h(\kappa) = 0. \tag{1.31}$$

例外点は存在しないので，有限の κ に対してすべてのものが正則である．$\lambda_h(\kappa)$ は $\kappa = \infty$ において正則だが，$P_h(\kappa)$ はそうでないことに注意しよう．これは次の例が示す状況とは，ある意味で正反対の状況といえよう．

f) $\lambda_1(\kappa) = \kappa$, $\lambda_2(\kappa) = 0$ に対する固有射影は

$$P_1(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \kappa \neq 0. \tag{1.32}$$

例外点 $\kappa = 0$ において $\lambda_h(\kappa)$ は正則であるが，それに対して，$P_h(\kappa)$ はそこで極を有する．また $\kappa = \infty$ では事態は逆転する．そして $\kappa = 0$ では，スペクトル表現は d) の場合と同じになる．

7. $T(\kappa)$ が κ について線形の場合

これまでに述べてきた一般的結果は，$T(\kappa)$ が κ について線形な (1.1) の場合には幾分か単純化される．このとき $T(\kappa)$ は複素平面の全体で定義され，これを領域 D_0 として採用することになる．特性方程式 (1.3) の係数は，次数が N を超えない κ の多項式である．それゆえ固有値 $\lambda_h(\kappa)$ は κ の代数函数の分岐となる．代数方程式 (1.3) が**既約**であるならば，唯一の N-値の代数函数が存在し，したがって $s = N$ である．(1.3) が**可約**の場合は，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ はいくつかの群に分類され，それぞれの群がひとつの代数函数に対応している．これらの代数函数の中にもし同一のものがあるとすれば，$s < N$（恒久退化）となる[15]．

代数函数 $\lambda_h(\kappa)$ は，κ の有限値では極をもたない．また $\kappa = \infty$ においては，たかだかひとつの位数 1 の極を有する．これは (1.1) を

$$T(\kappa) = \kappa(T' + \kappa^{-1} T) \tag{1.33}$$

の形式に書くことによって知られるであろう．なぜなら $\kappa^{-1} \to 0$ に対して $T' + \kappa^{-1}T$ の固有値は連続だからである．より正確にいえば，これらの固有値は $\mu_h + \beta_h(\kappa^{-1})^{1/p} + \cdots$ なる展開（κ^{-1} についてのピュイズー級数）をもち，したがって $T(\kappa)$ の固有値は

$$\lambda_h(\kappa) = \mu_h\, \kappa + \beta_h\, \kappa^{1-\frac{1}{p}} + \cdots, \quad \kappa \to \infty \tag{1.34}$$

なる形式を有する．$\kappa = \infty$ において $\lambda_h(\kappa)$ が正則でないとしても，$P_h(\kappa)$ あるいは $D_h(\kappa)$ は正則となる可能性があることに注意しよう［例 1.12 f) を見よ］．

---

[15] ここで述べた結果は $T(\kappa)$ が κ についての任意の次数の多項式の場合にも成り立つ．

8. 要約

便宜のために，これまでの諸項で得られた結果をここで要約しておこう[16].

$T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ を複素 κ-平面の領域 D_0 において正則な族とする．$T(\kappa)$ の固有値の数 s は，κ が例外点のひとつでなければ一定である．例外点は D_0 の各コンパクト部分集合内には有限個のみである．D_0 の各単純部分領域（例外点を含まない単連結な部分領域）D においては，$T(\kappa)$ の固有値は s 個の正則な函数 $\lambda_h(\kappa)$, $h = 1, \cdots, s$ として表現することができ，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ は一定の重複度 m_h を有する．$\lambda_h(\kappa)$ は D_0 上のひとつまたは複数の解析函数の分岐で，それらは代数特異点のみをもち，D_0 においていたるところ連続である［単純化のために，これらの解析函数もまた $\lambda_h(\kappa)$ という記号で表記する］．例外点 κ_0 はある $\lambda_h(\kappa)$ の分岐点であるか，あるいはすべての $\lambda_h(\kappa)$ の正則点であるかのいずれかである．後者の場合，いくつかの異った $\lambda_h(\kappa)$ の値が $\kappa = \kappa_0$ において合致する．

$T(\kappa)$ の固有値 $\lambda_h(\kappa)$ に対する固有射影 $P_h(\kappa)$ と固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ は，代数特異点のみをもつひとつまたは複数の解析函数［これもまた $P_h(\kappa)$, $D_h(\kappa)$ と表記する］の分岐であり，これは各部分領域 D において正則である．各 h に対して，$D_h(\kappa)$ は D の孤立部分集合における κ を除いて一定のジョルダン標準形をもち，一方 $P_h(\kappa)$ は一定の次元 m_k を有する[17]．解析函数 $P_h(\kappa)$, $\lambda_h(\kappa)$ は同じ位数の共通の分岐点をもつが，$\lambda_h(\kappa)$ は分岐点において連続であるのに対し，他方 $P_h(\kappa)$ はそこで常に極を有する．$\lambda_h(\kappa)$ がそこで正則であるような例外点においてさえ，$P_h(\kappa)$ と $D_h(\kappa)$ は極を有する可能性がある．

$\lambda_1(\kappa), \cdots, \lambda_r(\kappa)$ が λ-群をなす固有値［非摂動作用素 $T = T(0)$ の共通な固有値 λ から分裂によって生成される $T(\kappa)$ の固有値の全体．ここで $\kappa = 0$ は例外点と仮定されている］で，$P_1(\kappa), \cdots, P_r(\kappa)$ はそれにともなう固有射影とすれば，この λ-群に対する全射影 $P(\kappa) = P_1(\kappa) + \cdots + P_r(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において正則である．これらの固有値に対する全重複度 $m_1 + \cdots + m_r$ は，T の固有値 λ の重複度 m に等しい．λ-群はさらにいくつかのサイク

[16] より詳細かつ厳密な叙述については Baumgärtel [1] を見よ．

[17] $P_h(\kappa)$ の挙動および幾何的固有空間に関するより詳しいことがらについては §4.7 を見よ．

ル $\{\lambda_1(\kappa), \cdots, \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \cdots\}, \cdots, \{\cdots\}$ に分割され，またそれに対応して固有射影も同様に分割される．κ が $\kappa = 0$ の周囲の小円を動くとき，各サイクルの元は解析接続ののち，そのサイクルの中で周期的な置換をひきおこす．各サイクルにおける固有射影の和［たとえば $P_1(\kappa) + \cdots + P_p(\kappa)$］は，$\kappa = 0$ において一価であるが，必ずしも正則ではない（極をもつ可能性もある）．

§ 2.　摂動級数

1.　λ-群の全射影

前節においては，複素数のパラメータ κ に正則に依存する作用素 $T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ の固有値，固有射影および固有巾零作用素をそれぞれ表現する函数 $\lambda_h(\kappa)$, $P_h(\kappa)$ および $D_h(\kappa)$ の一般的性質について考察した．本節では，与えられた点 κ におけるこれらの函数のテイラー級数（それが存在する場合）を明示的に構成する．その際，$\kappa = 0$ と想定してよいであろう．また一般的なケースはあまりに複雑で完全に取り扱うことができないので，ここではある簡単化の仮定の下にこの問題を解き進めることで満足することとしたい．さらにここでは形式的な級数だけを与え，級数の収束半径や誤差評価は後の諸節で考察することにしよう[1]．

$T(\kappa)$ についての所与の巾級数から始める．

(2.1)
$$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)} + \kappa^2 T^{(2)} + \cdots.$$

λ は非摂動作用素 $T = T(0)$ の固有値のひとつで，（代数的）重複度を m とする．また P と D は λ に対応する固有射影と固有巾零作用素としよう．すると

(2.2)
$$TP = PT = PTP = \lambda P + D, \quad \dim P = m,$$

[1] 摂動級数は Schrödinger [1] に始まる量子力学において広汎に研究されてきた．量子力学に関するどんな教科書にも，摂動級数を扱う章が含まれている（たとえば Kemble【1】第11章，あるいは Schiff【1】第7章を見よ）．しかし殆どの場合，実数パラメータ κ に依存する自己随伴（対称）作用素 $T(\kappa)$ に議論が限定されている．本節では，これまでと同様 $0 < \dim \mathsf{X} = N < \infty$ を仮定したうえで，一般的な非対称作用素を考えることにしたい．

$$D^m = 0, \quad PD = DP = D$$

が成り立つ (I-§5.4 を見よ). 固有値 λ は一般に, 小さな $\kappa \neq 0$ に対する $T(\kappa)$ のいくつかの固有値に分裂する (λ-群). この点に関しては §1.8 を見ていただきたい. この λ-群の全射影 $P(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において正則であり [(1.17) を見よ],

$$P(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n P^{(n)}, \quad P^{(0)} = P. \tag{2.3}$$

ここで $P^{(n)}$ は (1.18) によって与えられる. 部分空間 $\mathsf{M}(\kappa) = P(\kappa)\mathsf{X}$ は m 次元で [(1.19) を見よ], $T(\kappa)$ の下に不変である. $T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値は, $\mathsf{M}(\kappa)$ における $T(\kappa)$ [すなわち $T(\kappa)$ の $\mathsf{M}(\kappa)$ における部分] のすべての固有値と合致する. したがって, λ-群を形づくる固有値を決定するためには, 一般には全空間 X よりも小さな部分空間 $\mathsf{M}(\kappa)$ において, 固有値問題を解きさえすればよいのである.

$\mathsf{M}(\kappa)$ における $T(\kappa)$ の固有値問題は, 次の作用素に対する固有値問題と同値である.

$$T_r(\kappa) = T(\kappa)\,P(\kappa) = P(\kappa)\,T(\kappa) = P(\kappa)\,T(\kappa)\,P(\kappa), \tag{2.4}$$

I-§5.1 を見よ. このように $T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値は, $|\lambda|$ が十分に大きく, これらの固有値が考察の対象となっている小さな $|\kappa|$ について消えない限り, $T_r(\kappa)$ のゼロとは異なる固有値と正確に一致する[2]. ここで課した条件は一般性を損うものではない. なぜなら問題の性質を変えることなく, T を $T + \alpha$ (α はスカラー) に置き換えることができるからである.

いずれにせよ,

$$\widehat{\lambda}(\kappa) = \frac{1}{m}\,\mathrm{tr}\left(T(\kappa)\,P(\kappa)\right) = \lambda + \frac{1}{m}\,\mathrm{tr}\left((T(\kappa) - \lambda)\,P(\kappa)\right) \tag{2.5}$$

は, $T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値の**加重平均** (weighted mean) に等しく, 加重は各固有値の重複度となっている [I-(5.40) および I-(3.25) を見よ]. λ

[2] $T_r(\kappa)$ は重複度 $N - m$ の固有値 0 をもち, 固有射影は $1 - P(\kappa)$ となることに注意しよう. p. 59 の脚注 1 をも参照.

に分裂がなく，したがって λ-群が重複度 m の単一の固有値 $\lambda(\kappa)$ から成っているとき，

$$\widehat{\lambda}(\kappa) = \lambda(\kappa) \tag{2.6}$$

が成り立つ．とくに $m=1$ ならば，これはいつでも成立する．そのような場合，$\lambda(\kappa)$ に対応する固有射影は，正確に全射影 (2.3) に等しく，また固有巾零作用素は

$$D(\kappa) = \big(T(\kappa) - \lambda(\kappa)\big)\ P(\kappa) \tag{2.7}$$

によって与えられる［I-(5.26) を見よ］．分裂のない場合には，これらの級数が λ-群に対する固有値問題に完全な解決を与えるものであり，$\lambda(\kappa)$, $P(\kappa)$ および $D(\kappa)$ はすべて $\kappa = 0$ において正則である．

さて次に，(2.1) における係数 $T^{(n)}$ を用いて，級数 (2.3), (2.5) の明示的な形を考えてみよう．ここで，$T^{(n)}$ のかわりに級数 (2.4) の係数を使ってもかまわないことに注意しておかねばならない．　なぜなら，λ-群に関する限り，$T(\kappa)$ と $T_r(\kappa)$ との固有値および固有射影は同一であるためである[3]．

(2.3) の係数 $P^{(n)}$ は (1.14) および (1.18) によって与えられる．かくして，Γ を λ の周囲の正の向きをもつ小さな円周とすれば，

(2.8)
$$P^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_p=n \\ \nu_j \geqq 1}} (-1)^p \int_\Gamma R(\zeta)\, T^{(\nu_1)}\, R(\zeta)\, T^{(\nu_2)} \cdots T^{(\nu_p)}\, R(\zeta)\, d\zeta$$

を得る．積分 (2.8) を評価するために，$R(\zeta)$ のかわりに $\zeta = \lambda$ におけるローラン展開 I-(5.18) を代入する．便宜上，ローラン展開を次のような形で書いておこう．

$$R(\zeta) = \sum_{n=-m}^{\infty} (\zeta - \lambda)^n\, S^{(n+1)}, \tag{2.9}$$

---

[3] 後段，無限次元空間における非有界作用素の固有値問題を考えるとき，この注意は有用である．その場合，級数 (2.1) は存在しないけれども，(2.4) を κ について級数展開することが可能なのである．VII- §1.5 を見よ†．

ただし

$$S^{(0)} = -P\,, \quad S^{(n)} = S^n, \quad S^{(-n)} = -D^n, \quad n \geqq 1\,. \tag{2.10}$$

ここで $S = S(\lambda)$ は T の被約レゾルベントの $\zeta = \lambda$ における値である（上記参照）．こうして I-(5.19), (5.26) により，

$$S\,P = P\,S = 0\,, \quad (T - \lambda)\,S = S\,(T - \lambda) = 1 - P \tag{2.11}$$

を得る．

(2.9) を (2.8) の被積分函数に代入して，$\zeta - \lambda$ についてのローラン展開が得られるが，そのうち積分に寄与するのは巾 $(\zeta - \lambda)^{-1}$ の項だけである．結果は次の有限和で与えられる．すなわち $n \geqq 1$ に対して

(2.12)

$$P^{(n)} = -\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_p=n \\ k_1+\cdots+k_{p+1}=p \\ \nu_j \geqq 1,\, k_j \geqq -m+1}} S^{(k_1)}\,T^{(\nu_1)}\,S^{(k_2)} \cdots S^{(k_p)}\,T^{(\nu_p)}\,S^{(k_{p+1})}.$$

たとえば

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \sum_{k_1+k_2=1} S^{(k_1)}\,T^{(1)}\,S^{(k_2)} \\ &= -D^{m-1}\,T^{(1)}\,S^m - \cdots - D\,T^{(1)}\,S^2 \\ &\quad - P\,T^{(1)}\,S - S\,T^{(1)}\,P \\ &\quad - S^2\,T^{(1)}\,D - \cdots - S^m\,T^{(1)}\,D^{m-1}, \\ P^{(2)} &= \sum_{k_1+k_2=1} S^{(k_1)} T^{(2)} S^{(k_2)} \\ &\quad - \sum_{k_1+k_2+k_3=2} S^{(k_1)} T^{(1)} S^{(k_2)} T^{(1)} S^{(k_3)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

とくに λ が T の半単純な固有値（I-§5.4 を見よ）の場合は，$D = 0$ であり，和 (2.12) に寄与するのは，k_j のうち非負の値をもつものだけである．このようにして，たとえば次のような計算結果を得る．

(2.14)

$$
\begin{aligned}
P^{(1)} &= -PT^{(1)}S - ST^{(1)}P, \\
P^{(2)} &= -PT^{(2)}S - ST^{(2)}P + PT^{(1)}ST^{(1)}S + ST^{(1)}PT^{(1)}S \\
&\quad + ST^{(1)}ST^{(1)}P - PT^{(1)}PT^{(1)}S^2 - PT^{(1)}S^2T^{(1)}P \\
&\quad - S^2T^{(1)}PT^{(1)}P, \\
P^{(3)} &= -PT^{(3)}S - ST^{(3)}P + PT^{(1)}ST^{(2)}S + PT^{(2)}ST^{(1)}S \\
&\quad + ST^{(1)}PT^{(2)}S + ST^{(2)}PT^{(1)}S + ST^{(1)}ST^{(2)}P \\
&\quad + ST^{(2)}ST^{(1)}P - PT^{(1)}PT^{(2)}S^2 - PT^{(2)}PT^{(1)}S^2 \\
&\quad - PT^{(1)}S^2T^{(2)}P - PT^{(2)}S^2T^{(1)}P - S^2T^{(1)}PT^{(2)}P \\
&\quad - S^2T^{(2)}PT^{(1)}P - PT^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}S \\
&\quad - ST^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}S \\
&\quad - ST^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}S - ST^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P \\
&\quad + PT^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}S^2 + PT^{(1)}PT^{(1)}S^2T^{(1)}S \\
&\quad + PT^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}S^2 + PT^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}S \\
&\quad + PT^{(1)}ST^{(1)}S^2T^{(1)}P + PT^{(1)}S^2T^{(1)}ST^{(1)}P \\
&\quad + ST^{(1)}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P + S^2T^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}P \\
&\quad + ST^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S^2 + S^2T^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S \\
&\quad + ST^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}P + S^2T^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}P \\
&\quad - PT^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S^3 - PT^{(1)}PT^{(1)}S^3T^{(1)}P \\
&\quad - PT^{(1)}S^3T^{(1)}PT^{(1)}P - S^3T^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}P.
\end{aligned}
$$

2.　固有値の加重平均

次に $T_r(\kappa) = T(\kappa)P(\kappa)$ に対する級数 (2.4) を考える．計算のためには，$T_r(\kappa)$ 自体を考えるかわりに $(T(\kappa)-\lambda)P(\kappa)$ という作用素を考える方が便利である．$(T(\kappa)-\lambda)R(\zeta,\kappa) = 1 + (\zeta-\lambda)R(\zeta,\kappa)$ であり，Γ に沿う 1 の積分はゼロであるから，(1.16) により

$$(2.15)\qquad \big(T(\kappa)-\lambda\big)\; P(\kappa) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta-\lambda)\, R(\zeta,\kappa)\, d\zeta$$

を得る．(2.2) より $(T-\lambda)P = D$ であることに注意すると，

$$(2.16)\qquad \big(T(\kappa)-\lambda\big)\, P(\kappa) = D + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n\, \widetilde{T}^{(n)}$$

が成り立つ．ここで $n \geqq 1$ に対して

(2.17)

$$\widetilde{T}^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_p=n \\ \nu_j \geqq 1}} (-1)^p \int_\Gamma R(\zeta)\, T^{(\nu_1)} \cdots T^{(\nu_p)}\, R(\zeta)(\zeta-\lambda)\, d\zeta$$

である．これが (2.8) と異なるのは，被積分函数における $\zeta-\lambda$ の項のみである．したがって

$$(2.18)\qquad \widetilde{T}^{(n)} = -\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_p=n \\ k_1+\cdots k_{p+1}=p-1 \\ \nu_j\geqq 1,\ k_j \geqq -m+1}}$$

であり，加え合わされる項は (2.12) と同じである．たとえば

$$(2.19)\qquad \begin{aligned}\widetilde{T}^{(1)} = &-D^{m-1}\, T^{(1)}\, S^{m-1} \\ &-\cdots - D\,T^{(1)}\, S + P\,T^{(1)}\, P - S\,T^{(1)}\, D \\ &-\cdots - S^{m-1}\, T^{(1)}\, D^{m-1}.\end{aligned}$$

ここでもまた，λ が T の半単純な固有値である場合 $(D=0)$ は，上記の表現は簡単になる．たとえば

(2.20)

$$\widetilde{T}^{(1)} = P\,T^{(1)}\, P,$$

$$\widetilde{T}^{(2)} = P\,T^{(2)}\, P - P\,T^{(1)}\, P\,T^{(1)}\, S - P\,T^{(1)}\, S\,T^{(1)}\, P - S\,T^{(1)}\, P\,T^{(1)}\, P,$$

$$\begin{aligned}\widetilde{T}^{(3)} = &\ P\,T^{(3)}\, P - P\,T^{(1)}\, P\,T^{(2)}\, S - P\,T^{(2)}\, P\,T^{(1)}\, S \\ &- P\,T^{(1)}\, S\,T^{(2)}\, P - P\,T^{(2)}\, S\,T^{(1)}\, P\end{aligned}$$

$$- ST^{(1)}PT^{(2)}P - ST^{(2)}PT^{(1)}P$$
$$+ PT^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}S + PT^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}S$$
$$+ PT^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P + ST^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S$$
$$+ ST^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}P + ST^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}P$$
$$- PT^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S^2 - PT^{(1)}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P$$
$$- PT^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}P - S^2T^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}P.$$

λ-群を形づくる固有値の加重平均 $\widehat{\lambda}(\kappa)$ についての級数は，(2.5) および (2.16) から得られる．すなわち

$$\widehat{\lambda}(\kappa) = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n \widehat{\lambda}^{(n)} \tag{2.21}$$

であり，ここで

$$\widehat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} \widetilde{T}^{(n)}, \quad n \geqq 1 \tag{2.22}$$

である．こうして $\widetilde{T}^{(n)}$ に (2.18) を代入すれば，係数 $\widehat{\lambda}^{(n)}$ が与えられる．

しかし $\widehat{\lambda}(\kappa)$ の別表現で，計算上，より便利なものが存在する．すなわち

(2.23)
$$\widehat{\lambda}(\kappa) - \lambda = -\frac{1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \int_\Gamma \log \left[1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n T^{(n)} \right) R(\zeta) \right] d\zeta$$

である．ここで対数函数 $\log(1+A)$ は

$$\log(1+A) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} A^p \tag{2.24}$$

によって定義され，これは $\|A\| < 1$ について成り立つ．領域 Δ の特別な選び方によっては，(2.24) は I-(5.57) と一致することに注意しよう．(Δ として，$1 + A$ の固有値を含む，$\zeta = 1$ の近傍をとればよい．)

(2.23) を証明するためには，(2.5) および (2.15) から始め，

(2.25)
$$\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda=-\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\int_\Gamma(\zeta-\lambda)\,R(\zeta,\kappa)\,d\zeta$$

を得る．(1.13) の結果を $R(\zeta,\kappa)$ に代入すれば，

(2.26)
$$\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda=-\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\int_\Gamma\sum_{p=1}^{\infty}(\zeta-\lambda)\,R(\zeta)\big(-A(\kappa)\,R(\zeta)\big)^p d\zeta$$

である．$\operatorname{tr} D=0$ （問題 I-3.11 を見よ）であるから，(2.26) における $p=0$ の項はゼロである．

さて $dR(\zeta)/d\zeta=R(\zeta)^2$ ［I-(5.8) を見よ］なる関係を利用すれば，

(2.27)
$$\begin{aligned}\frac{d}{d\zeta}\big(A(\kappa)\,R(\zeta)\big)^p&=\frac{d}{d\zeta}\big[A(\kappa)\,R(\zeta)\cdots A(\kappa)\,R(\zeta)\big]\\&=A(\kappa)\,R(\zeta)\cdots A(\kappa)\,R(\zeta)^2\\&\quad+\cdots+A(\kappa)\,R(\zeta)^2\cdots A(\kappa)\,R(\zeta)\end{aligned}$$

が成り立つ．こうして等式 $\operatorname{tr} AB=\operatorname{tr} BA$ を適用すると，

(2.28)
$$\operatorname{tr}\frac{d}{d\zeta}\big(A(\kappa)\,R(\zeta)\big)^p=p\operatorname{tr} R(\zeta)\big(A(\kappa)\,R(\zeta)\big)^p$$

が導かれ，(2.26) は

(2.29)
$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda&=-\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\int_\Gamma\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}(\zeta-\lambda)\frac{d}{d\zeta}\big(-A(\kappa)\,R(\zeta)\big)^p d\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\int_\Gamma\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\big(-A(\kappa)\,R(\zeta)\big)^p d\zeta\quad\text{（部分積分）}\end{aligned}$$

となって[4]，これは (2.23) と一致する［$A(\kappa)$ の定義 (1.10) を想起せよ］．

(2.23) における対数函数を (2.24) にしたがって展開し，その結果を κ の巾に配列するならば，$\widehat{\lambda}(\kappa)$ に対する級数の係数は次の式によって与えられる

[4] トレースの演算と積分は可換である．その証明は I-(4.30) の証明と同様で，tr が $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ 上の線形汎函数であるという事実に依拠する．

ように思われる．

(2.30)

$$\widehat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_p=n} \frac{(-1)^p}{p} \int_\Gamma T^{(\nu_1)} R(\zeta) \cdots R(\zeta) T^{(\nu_p)} R(\zeta)\, d\zeta;$$

$$n \geqq 1.$$

これは (2.8) および (2.17) と同様に扱うことが可能である．その結果は

(2.31)

$$\widehat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} \sum_{\substack{\nu_1+\cdots+\nu_p=n \\ k_1+\cdots+k_p=p-1}} \operatorname{tr} T^{(\nu_1)} S^{(k_1)} \cdots T^{(\nu_p)} S^{(k_p)}$$

となる．この公式は (2.22) よりも便利である．それは (2.31) に含まれる加算項が，(2.18) よりも単純であるためである．たとえば，

(2.32)

$$\widehat{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} T^{(1)} P,$$

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}^{(2)} &= \frac{1}{m}\left[\operatorname{tr} T^{(2)} P + \frac{1}{2} \sum_{k_1+k_2=1} \operatorname{tr} T^{(1)} S^{(k_1)} T^{(1)} S^{(k_2)}\right] \\ &= \frac{1}{m}\Big[\operatorname{tr} T^{(2)} P \\ &\qquad - \operatorname{tr}(T^{(1)} S^m T^{(1)} D^{m-1} + \cdots + T^{(1)} S T^{(1)} P)\Big]\end{aligned}$$

であり，ここで再び $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ なる等式を用いた[5]．

これらの公式は，固有値 λ が半単純の場合には簡単になる．上に述べた公式を再度利用すると，次の関係を得る．

(2.33)

$$\widehat{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} T^{(1)} P,$$

$$\widehat{\lambda}^{(2)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} \left[T^{(2)} P - T^{(1)} S T^{(1)} P\right],$$

[5] たとえば $(1/2)(\operatorname{tr} T^{(1)}ST^{(1)}P + \operatorname{tr} T^{(1)}PT^{(1)}S) = \operatorname{tr} T^{(1)}ST^{(1)}P$．類似の計算が公式 (2.33) でも行なわれている．

$$\widehat{\lambda}^{(3)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} \Big[T^{(3)} P - T^{(1)} S T^{(2)} P - T^{(2)} S T^{(1)} P$$
$$+ T^{(1)} S T^{(1)} S T^{(1)} P - T^{(1)} S^2 T^{(1)} P T^{(1)} P\Big],$$

$$\widehat{\lambda}^{(4)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr}\Big[T^{(4)} P - T^{(1)} S T^{(3)} P - T^{(2)} S T^{(2)} P - T^{(3)} S T^{(1)} P$$
$$+ T^{(1)} S T^{(1)} S T^{(2)} P + T^{(1)} S T^{(2)} S T^{(1)} P$$
$$+ T^{(2)} S T^{(1)} S T^{(1)} P - T^{(1)} S^2 T^{(1)} P T^{(2)} P$$
$$- T^{(1)} S^2 T^{(2)} P T^{(1)} P - T^{(2)} S^2 T^{(1)} P T^{(1)} P$$
$$- T^{(1)} S T^{(1)} S T^{(1)} S T^{(1)} P + T^{(1)} S^2 T^{(1)} S T^{(1)} P T^{(1)} P$$
$$+ T^{(1)} S T^{(1)} S^2 T^{(1)} P T^{(1)} P + T^{(1)} S^2 T^{(1)} P T^{(1)} S T^{(1)} P$$
$$- T^{(1)} S^3 T^{(1)} P T^{(1)} P T^{(1)} P\Big].$$

問題 2.1. $T(\kappa)$ が κ について線形であるならば（$n \geqq 2$ に対して $T^{(n)} = 0$），

(2.34) $$\widehat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{mn} \operatorname{tr}\,(T^{(1)} P^{(n-1)}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

[ヒント：(2.8) と (2.30) とを比較せよ.]

注意 2.2. $\widehat{\lambda}^{(n)}$ についてのこれらの表現は，適切に選ばれた基底で表わされる場合は，(より複雑ではあるが）一層馴染みのある形態をもつ．簡単化のために非摂動作用素 T は対角化可能であるとする．λ_h, P_h, $h = 1, 2, \cdots$ を，考察の対象になっている λ, P とは異なる，T の固有値および固有射影としよう．$\{x_1, \cdots, x_m\}$ を $\mathsf{M} = \mathsf{R}(P)$ の基底，また各 h に対して $\{x_{h1}, \cdots, x_{hm_h}\}$ を $\mathsf{M}_h = \mathsf{R}(P_h)$ の基底とする．これらすべてのベクトル x_j, x_{hj} の合併は，T の固有ベクトルから成る X の基底を形づくり，それは X の分解 $\mathsf{X} = \mathsf{M} \oplus \mathsf{M}_1 \oplus \cdots$ に適応するものである．X^* の随伴基底は，それに対応する分解 $\mathsf{X}^* = \mathsf{M}^* \oplus \mathsf{M}_1^* \oplus \cdots$ に適応するものであり，ここで $\mathsf{M}^* = \mathsf{R}(P^*)$, $\mathsf{M}_1^* = \mathsf{R}(P_1^*), \cdots$ である．それは M^* の基底 $\{e_1, \cdots, e_m\}$, M_1^* の基底 $\{e_{11}, \cdots, e_{1m_1}\}$，等から成る（問題 I-3.19 を見よ）.

さて，任意の $u \in \mathsf{X}$ に対して

$$P u = \sum_{j=1}^{m} (u, e_j)\, x_j, \quad P_h u = \sum_{j=1}^{m_h} (u, e_{hj})\, x_{hj}, \quad h = 1, 2, \ldots$$

であり，また任意の作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して

$$\operatorname{tr} AP = \sum_{j=1}^{m} (Ax_j, e_j), \quad \operatorname{tr} AP_h = \sum_{j=1}^{m_h} (Ax_{hj}, e_{hj}), \quad h = 1, 2, \ldots$$

が成り立つ．作用素 S は I-(5.32) によって与えられる．ただし添字 h は削除しなければならない．それゆえ

$$Su = \sum_{k} (\lambda_k - \lambda)^{-1} P_k u = \sum_{k,j} (\lambda_k - \lambda)^{-1} (u, e_{kj}) x_{kj}.$$

このようにして (2.33) から，$\widehat{\lambda}^{(n)}$ についての次のような表現が導かれる．

$$\text{(2.35)} \qquad \widehat{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{m} \sum_{j} (T^{(1)} x_j, e_j),$$

$$\widehat{\lambda}^{(2)} = \frac{1}{m} \sum_{j} (T^{(2)} x_j, e_j) - \frac{1}{m} \sum_{i,j,k} (\lambda_k - \lambda)^{-1} (T^{(1)} x_i, e_{kj})(T^{(1)} x_{kj}, e_i).$$

とくに，T の固有値 λ が単純，つまり $m = 1$ であると仮定しよう．φ をこの固有値に対する T の固有ベクトルとする．このとき $x_1 = \varphi$ としてよい．すると $e_1 = \psi$ は固有値 $\overline{\lambda}$ に対する T^* の固有ベクトルである．T の他の固有ベクトル x_{hj} の番号をつけかえて単純な点列 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ をつくり，対応する固有値を $\mu_1, \mu_2, \cdots$ とすれば，これらは λ とは異なるが，必ずしも相互に異なっているとは限らない（重複固有値）．これに呼応して e_{hj} を単純な点列 ψ_j に書き直せば，$\{\psi, \psi_1, \psi_2, \cdots\}$ は，X の基底 $\{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ に随伴する X* の基底となる．すると上記の公式は次のように書くことができる（分裂が存在しないので，$\widehat{\lambda}^{(n)} = \lambda^{(n)}$ であることに注意しよう）．

$$\text{(2.36)} \qquad \lambda^{(1)} = (T^{(1)} \varphi, \psi),$$

$$\lambda^{(2)} = (T^{(2)} \varphi, \psi) - \sum_{j} (\mu_j - \lambda)^{-1} (T^{(1)} \varphi, \psi_j)(T^{(1)} \varphi_j, \psi).$$

これらは，T も $T^{(n)}$ も対称（エルミット）であることをここでは仮定しないという点を除いて，量子力学の教科書で馴染みの深い公式である[6]．したがって，正規直交系ではなく，固有ベクトルから成る双直交系を得るのである（対称的な場合は，$\psi = \varphi$, $\psi_j = \varphi_j$ となる）．

---

[6] 先にも掲げた Kemble【1】または Schiff【1】を見よ．

3. 簡約過程

λ が T の半単純な固有値であるならば，$D=0$ と (2.16) から

$$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa) \equiv \frac{1}{\kappa}\,(T(\kappa)-\lambda)\,P(\kappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n\, \widetilde{T}^{(n+1)}. \tag{2.37}$$

$\mathsf{M}(\kappa)=\mathsf{R}(P(\kappa))$ は $T(\kappa)$ の下で不変であるから，$T(\kappa)$ および $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の $\mathsf{M}(\kappa)$ における部分の間には明白な関係が存在する．こうして $\mathsf{M}(\kappa)$ における $T(\kappa)$ の固有値問題の解決は，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ についての固有値問題に帰着するのである．さて (2.37) を見れば，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ が $\kappa=0$ において正則であることが知られ，したがってこれまでに $T(\kappa)$ に対して証明された事柄を $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ に適用することができる．$T(\kappa)$ についての問題を $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ についての問題に帰着させるこのプロセスを**簡約過程** (reduction process) と称する．この族 $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ に対する“非摂動作用素”は［(2.20) を見よ］

$$\widetilde{T}^{(1)}(0) = \widetilde{T}^{(1)} = P\,T^{(1)}\,P \tag{2.38}$$

である．したがって $\widetilde{T}^{(1)}$ の各固有値は，小さな $|\kappa|$ に対しては，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ のいくつかの固有値に分裂する．不変部分空間 $\mathsf{M}=\mathsf{M}(0)=\mathsf{R}(P)$ における $\widetilde{T}^{(1)}$ の固有値を $\lambda_j^{(1)}$, $j=1,2,\cdots$ と表記する［相補的部分空間 $\mathsf{R}(1-P)$ における $\widetilde{T}^{(1)}$ の固有値ゼロは，ここでは興味の対象外である］．M における $\widetilde{T}^{(1)}$ のスペクトル表現は次の形となる．

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{(1)} &= P\,T^{(1)}\,P = \sum_j \left(\lambda_j^{(1)} P_j^{(1)} + D_j^{(1)}\right). \\ P &= \sum_j P_j^{(1)}, \quad P_j^{(1)} P_k^{(1)} = \delta_{jk}\, P_j^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

さしあたり，すべての $\lambda_j^{(1)}$ がゼロではないことを仮定しよう．摂動により，各 $\lambda_j^{(1)}$ は $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ のいくつかの固有値（$\lambda_j^{(1)}$-群）に分裂し，それはある $p_j \geqq 1$ を用いると，κ^{1/p_j} の巾級数となる[7]．$T(\kappa)$ のそれに対応する固

[7] 一般には $\lambda_j^{(1)}$-群にはいくつかのサイクルが存在するが，この群の固有値はすべて形式的には，適当に選んだ共通の整数 p_j を用いると，κ^{1/p_j} の巾級数として表現することができる．

有値は次のような形になる．

$$\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}+\kappa^{1+\frac{1}{p_j}}\alpha_{jk}+\cdots,\quad k=1,2,\ldots. \tag{2.40}$$

ある $\lambda_j^{(1)}$ がゼロの場合は，$\widetilde{T}^{(1)}$ のそれに付随する固有空間は部分空間 $\mathsf{R}(1-P)$ を含むことになる．しかしこの種の不便は，$T(\kappa)$ に $\alpha\kappa$ の形の項を加えることによって回避しうる可能性がある．この操作は $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ に $\alpha P(\kappa)$ という項を加えることになる．そしてこれは固有射影と固有巾零作用素とを不変にとどめたまま，$\mathsf{M}(\kappa)$ における $T^{(1)}(\kappa)$ の固有値を α だけ変化せしめる効果をもつにすぎない［ただし相補的部分空間 $\mathsf{R}(1-P(\kappa))$ における固有値は変化せず］．α を適当に選ぶことによって，修正された $\lambda_j^{(1)}$ はゼロと異なる値にすることができる．このように，$\lambda_j^{(1)}\neq 0$ という仮定は一般性を損うものではなく，以下の議論においては便宜に応じていつでも，この仮定を採用することにしよう．

λ および $\lambda_j^{(1)}$ を固定したとき，$T(\kappa)$ の固有値 (2.40) は $\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}$-群を形づくるという．(2.40) から，次の定理の成立することがただちに知られる．

定理 2.3.　λ を非摂動作用素 T の半単純固有値とすれば，$T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値のおのおのは (2.40) の形式を有し，したがってある $\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}$-群に属する．これらの固有値は $\kappa=0$ の近傍において（$\kappa=0$ が分岐点である場合でさえ）連続微分可能である．$\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}$-群の全射影 $P_j^{(1)}(\kappa)$（固有射影の和）およびこの群の加重平均は，$\kappa=0$ において正則である．

定理の最後の命題は，$P_j^{(1)}(\kappa)$ が作用素 $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の $\lambda_j^{(1)}$-群についての全射影であるという事実から導かれる．この $\lambda_j^{(1)}$-群の加重平均 $\hat{\lambda}_j^{(1)}(\kappa)$ についても同様のことが妥当する．

上に述べた簡約過程はさらに，$\widetilde{T}^{(1)}$ の固有値 $\lambda_j^{(1)}$ に対しても，それが半単純である場合には適用可能であり，その結果，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の $\lambda_j^{(1)}$-群を形づくる固有値は $\lambda_j^{(1)}+\kappa\lambda_{jk}^{(2)}+o(\kappa)$ なる形式を有することとなる．$T(\kappa)$ のそれに対応する固有値は

$$\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}+\kappa^2\lambda_{jk}^{(2)}+o(\kappa^2) \tag{2.41}$$

の形式をもつ．j,k を固定したとき，これらの固有値は $T(\kappa)$ の $\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}+$

$\kappa^2\lambda_{jk}^{(2)}$-群を形づくる．このようにして，簡約過程を継続することができ，非摂動固有値が簡約過程の各段階において半単純である限り，$T(\kappa)$ の固有値と固有射影は κ についての形式的巾級数に展開できることがわかるのである．

しかしながら，**簡約過程を無制限に継続してゆくことは，たとえそれが可能だとしても必要ではない**．分裂は有限回，たとえば n 回のステップの後に終結しなければならないから，n 番目のステップにおける固有値の全射影と加重平均はそれぞれ，固有射影および固有値自体の完全な展開を与えることになるであろう．

注意 2.4. ところで n 番目のステップのあとには全く分裂が生じないということを，どのようにして知ることができるのであろうか．n 番目のステップにおける全射影が 1 次元であるならば，これは明白である．そうでない場合は，その点をめぐる**一般的な**基準は存在しない．しかし多くの応用においては，この問題は次の可約性の議論を通じて解決することができる．

すべての κ に対して $AT(\kappa) = T(\kappa)A$ を満たす作用素の集合 $\{A\}$ が存在するとしよう．すると A と $R(\zeta, \kappa)$ とは可換であるから，A は $T(\kappa)$ のいかなる固有射影とも可換である［I-(5.22) を見よ］．T の半単純な固有値 λ に何らかの分裂が存在するならば，定理 2.3 における各 $P_j^{(1)}(\kappa)$ は A と可換であり，$P_j^{(1)} = P_j^{(1)}(0)$ も同様である．$P_j^{(1)}$ は P の狭義の劣射影（I-§3.4 を見よ）であるから，次のような結果が成り立つ．**$\boldsymbol{\lambda}$ が半単純で，しかも $\boldsymbol{P}$ がすべての $\boldsymbol{A}$ と可換であるような劣射影をもたないという意味で既約ならば，第 1 ステップにおいて $\boldsymbol{\lambda}$ の分裂は存在しない**．問題の非摂動固有値が簡約過程のあらゆるステップにおいて半単純であることが知られているならば，P の既約性は分裂が全く存在しないことを意味する．同様に，非摂動固有射影があるステップで既約となるならば，さらに分裂が生じることはないのである．

4. 高次の近似公式

$T(\kappa)$ の $\lambda + \kappa\lambda_j^{(1)}$-群の全射影を表わす級数 $P_j^{(1)}(\kappa)$ は，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ に対する級数 (2.37) から決定することができ，それは $P(\kappa)$ が $T(\kappa)$ から決定され

たのと同様である．この目的のために，最初のステップで用いられる T の被約レゾルベント S に対応する，$\widetilde{T}^{(1)}$ の被約レゾルベントが必要となる．この作用素は

$$S_j^{(1)} - \frac{1}{\lambda_j^{(1)}}(1-P) \tag{2.42}$$

なる形式をもつ．ここで第二項は $\widetilde{T}^{(1)}$ が恒等的にゼロとなる部分空間 $(1-P)\mathsf{X}$ における $\widetilde{T}^{(1)}$ の部分に由来し，また

$$S_j^{(1)} = -\sum_{k\neq j}\left[\frac{P_k^{(1)}}{\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(1)}} + \frac{D_k^{(1)}}{(\lambda_j^{(1)}-\lambda_k^{(1)})^2} + \cdots\right] \tag{2.43}$$

は，$\mathsf{M} = P\mathsf{X}$ における $\widetilde{T}^{(1)}$ の部分に由来する［I-(5.32) を見よ］．次の関係にも注意しておこう．

$$S_j^{(1)}P = PS_j^{(1)} = S_j^{(1)}, \quad S_j^{(1)}P_j^{(1)} = P_j^{(1)}S_j^{(1)} = 0. \tag{2.44}$$

§1.1 の結果を適用すると，

$$P_j^{(1)}(\kappa) = P_j^{(1)} + \kappa P_j^{(11)} + \kappa^2 P_j^{(12)} + \cdots \tag{2.45}$$

が導かれる．ここで係数は (2.12) によって計算されるが，その際 $T^{(\nu)}$ は (2.18) によって与えられる $\widetilde{T}^{(\nu+1)}$ で置き換え，また $S^{(k)}$ は $k \geqq 1, k=0, k \leqq -1$ の各場合に応じて，それぞれ $(S_j^{(1)} - (1-P)/\lambda_j^{(1)})^k$, $-P_j^{(1)}$, $-(D_j^{(1)})^{-k}$ で置き換えるのである．たとえば $\lambda_j^{(1)}$ が半単純 $(D_j^{(1)}=0)$ ならば，(2.14) により

$$P_j^{(11)} = -P_j^{(1)}\widetilde{T}^{(2)}\left(S_j^{(1)} - \frac{1}{\lambda_j^{(1)}}(1-P)\right) + (\mathrm{inv}) \tag{2.46}$$

が得られる．ここで (inv) は (2.14) の各項における因子の順序を逆にして得られる表現を意味している．(2.20) から $\widetilde{T}^{(2)}$ を代入すると，

$$\begin{aligned} P_j^{(11)} = -P_j^{(1)}T^{(2)}S_j^{(1)} - \frac{1}{\lambda_j^{(1)}}P_j^{(1)}T^{(1)}PT^{(1)}S \\ + P_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}S_j^{(1)} + (\mathrm{inv}). \end{aligned}$$

しかし $\lambda_j^{(1)}$ は $PT^{(1)}P$ の半単純固有値であるから，$P_j^{(1)}T^{(1)}P=P_j^{(1)}T^{(1)}P_j^{(1)}=\lambda_j^{(1)}P_j^{(1)}$ である．ゆえに

$$P_j^{(11)} = -P_j^{(1)}T^{(2)}S_j^{(1)} - P_j^{(1)}T^{(1)}S + P_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}S_j^{(1)} + (\mathrm{inv}). \tag{2.47}$$

最後の結果は $\lambda_j^{(1)}$ を明示的には含んでいないことに注意しよう．$P_j^{(12)}$ も，表現はかなり複雑になるけれども，同様にして計算することができる．

$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の $\lambda_j^{(1)}$-群を形づくる固有値の加重平均 $\widehat{\lambda}_j^{(1)}(\kappa)$ は

$$\widehat{\lambda}_j^{(1)}(\kappa) = \lambda_j^{(1)} + \kappa\,\widehat{\lambda}_j^{(12)} + \kappa^2\,\widehat{\lambda}_j^{(13)} + \cdots \tag{2.48}$$

で与えられ，係数 $\lambda_j^{(1n)}$ は m, P, S, $T^{(\nu)}$ をそれぞれ $m_j^{(1)} = \dim P_j^{(1)}\mathsf{X}$, $P_j^{(1)}$, (2.42) および $\widetilde{T}^{(\nu+1)}$ で置き換えて得られるのである．たとえば，$\lambda_j^{(1)}$ が半単純であることを仮定すると，

(2.49)

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_j^{(12)} &= \frac{1}{m_j^{(1)}}\,\mathrm{tr}\,\widetilde{T}^{(2)}P_j^{(1)} \\
&= \frac{1}{m_j^{(1)}}\,\mathrm{tr}\,\bigl[T^{(2)}P_j^{(1)} - T^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)}\bigr],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_j^{(13)} &= \frac{1}{m_j^{(1)}}\,\mathrm{tr}\,\left[\widetilde{T}^{(3)}P_j^{(1)} - \widetilde{T}^{(2)}\left(S_j^{(1)} - \frac{1}{\lambda_j^{(1)}}\,(1-P)\right)\widetilde{T}^{(2)}P_j^{(1)}\right] \\
&= \frac{1}{m_j^{(1)}}\,\mathrm{tr}\,\bigl[T^{(3)}P_j^{(1)} - T^{(1)}ST^{(2)}P_j^{(1)} - T^{(2)}ST^{(1)}P_j^{(1)} \\
&\quad + T^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)} - \lambda_j^{(1)}T^{(1)}S^2T^{(1)}P_j^{(1)} \\
&\quad - T^{(2)}S_j^{(1)}T^{(2)}P_j^{(1)} + T^{(1)}ST^{(1)}S_j^{(1)}T^{(2)}P_j^{(1)} \\
&\quad + T^{(2)}S_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)} - T^{(1)}ST^{(1)}S_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)}\bigr].
\end{aligned}$$

ここで再び等式 $\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$ および (2.44), (2.11) なる関係を用いた．

$T(\kappa)$ の $\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}$-群を形づくる固有値の加重平均は

$$\widehat{\lambda}_j(\kappa) = \lambda + \kappa\,\widehat{\lambda}_j^{(1)}(\kappa) \tag{2.50}$$

$$= \lambda + \kappa\,\lambda_j^{(1)} + \kappa^2\,\widehat{\lambda}_j^{(12)} + \kappa^3\,\widehat{\lambda}_j^{(13)} + \cdots$$

によって与えられる．$\lambda + \kappa\lambda_j^{(1)}$-群に分裂が存在しないならば（すなわちこの群が単一の固有値から成るならば），(2.50) がまさにこの固有値となる．とくに $m_j^{(1)} = 1$ ならば，この事態が妥当する．

注意 2.5.　(2.49) の第三次の係数 $\widehat{\lambda}_j^{(13)}$ が $T^{(2)}$ について二次の $-(1/m_j^{(1)})\mathrm{tr}\,T^{(2)}S_j^{(1)}T^{(2)}P_j^{(1)}$ のような項を含むことは一見したところ奇異に見えるかもしれない．しかし次の事例によって確かめられるように，これにはいかなる矛盾もないのである．$N = 2$ とし，

$$T = 0, \quad T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geqq 3 \text{ については } T^{(n)} = 0$$

としよう．$T(\kappa)$ の固有値は

$$\pm\kappa\left(1 + \alpha^2\kappa^2\right)^{1/2} = \pm\left(\kappa + \frac{1}{2}\,\alpha^2\kappa^3 + \cdots\right)$$

であり，第三次項の係数は $\alpha^2/2$ となって，確かに α（すなわち $T^{(2)}$）について二次となる．

5.　モツキン-タウスキーの定理

定理 2.3 の応用として，モツキンとタウスキー[1], [2] によるいくつかの定理を証明しよう．

定理 2.6.　作用素 $T(\kappa) = T + \kappa T'$ は，あらゆる複素数 κ について対角化可能とする．このとき $T(\kappa)$ のすべての固有値は κ について線形であり（すなわち $\lambda_h + \kappa\alpha_h$ という形式をもち），それに伴う固有射影は κ の整函数である．

証明.　$T(\kappa)$ の固有値 $\lambda_h(\kappa)$ は κ についての代数函数の分岐である（§1.7 を見よ）．他方，定理 2.3 によれば，κ のすべての（有限）値において，$\lambda_h(\kappa)$ は κ に関して連続微分可能である．さらに (1.34) から，$d\lambda_h(\kappa)/d\kappa$ は $\kappa = \infty$ において有界であることが知られる．したがってこれらの導函数は定数でなけ

ればならない（これは解析函数についての最大値原理の簡単な帰結である[8]）．これで $\lambda_h(\kappa)$ が κ について線形であることが示されたのである．

$\lambda_h(\kappa)$ は $\lambda_h+\kappa\alpha_h$ なる形式をもつので，単一の固有値 $\lambda_h(\kappa)$ が $T(\kappa)$ の $\lambda_h+\kappa\alpha_h$-群を構成する．こうして $\lambda_h(\kappa)$ に随伴する固有射影 $P_h(\kappa)$ はこの群の全射影と一致し，したがって $\kappa=0$ において正則である（定理 2.3 を見よ）．$T(\kappa)$ および $\lambda_h(\kappa)$ は κ について線形なので，同様のことがすべての κ において成立する．このようにして，$P_h(\kappa)$ が整函数であることが示された．

$P_h(\kappa)$ は $\kappa=\infty$ において極を有する可能性がある［例 1.12, e) を見よ］．しかし T' も対角化可能であるとすれば，$P_h(\kappa)$ は $\kappa=\infty$ においてさえ正則とならねばならない．なぜなら $T(\kappa)=\kappa(T'+\kappa^{-1}T)$ の固有射影は $T'+\kappa^{-1}T$ のそれと合致し，これに $\kappa=\infty$ における上記の結果が適用されるからである．それゆえ各 $P_h(\kappa)$ は $\kappa=\infty$ を含むいたるところで正則であり，したがってリューヴィルの定理[9]により一定でなければならない．これから T および T' が共通の固有射影をもつ［すなわち $P_h(0)=P_h(\infty)$］こと，そしてまたその双方が対角化可能なので，それらが可換であることが導かれる．こうして次の定理が成り立つのである．

定理 2.7.　定理 2.6 において T' も対角化可能ならば，T と T' とは可換である．

これらの定理に斉次の形式を与えると次のようである．

定理 2.8.　$A, B\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ はその一次結合 $\alpha A+\beta B$ が，単一の例外を許してすべての比 $\alpha:\beta$ (∞ を含む）について対角化可能であるものとしよう．このとき $\alpha A+\beta B$ のすべての固有値は $\alpha\lambda_h+\beta\mu_h$ の形式をもち，λ_h, μ_h は α,β から独立である．上記の例外を許さなければ，A と B とは可換である．

---

[8] $\mu(\kappa)=d\lambda_h(\kappa)/d\kappa$ は（$\kappa=\infty$ を含む）いたるところで連続であるから，$|\mu(\kappa)|$ はある $\kappa=\kappa_0$（$\kappa_0=\infty$ も許す）において最大値をとらねばならぬ．したがって最大値原理により，$\mu(\kappa)$ は定数とならなければならないのである．Knopp【1】, p. 84 を見よ［κ_0 が位数 $p-1$ の分岐点である場合は，$(\kappa-\kappa_0)^{1/p}=\kappa'$ を代入したのちに最大値原理を適用せよ．また $\kappa_0=\infty$ の場合は，$\kappa^{-1}=\kappa'$ を代入したのちに同原理を用いよ］．

[9] Knopp【1】, p. 112 を見よ．

注意 2.9.　上に述べた諸定理は，すべての有限な κ（単一の例外を許してすべての比 $\alpha:\beta$）に対して，$T(\kappa)(\alpha A+\beta B)$ の対角可能性が本質的であるという意味で **大域的** (global) な性格を有するものである．$T(\kappa)$ が，単に κ-平面のある定義域 D におけるあらゆる κ に対して対角化可能であるという事実からは，$T(\kappa)$ の固有値の D における正則性さえ導かれないのであって，それは次の例に示されるとおりである．

例 2.10.　$N=3$ とし，また

$$T(\kappa)=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\0&0&\kappa\\\kappa&0&1\end{pmatrix} \tag{2.51}$$

とする．方程式 $\kappa^3=-4/27$ を満たす三つの値を例外とし，これ以外のすべての κ について $T(\kappa)$ が対角化可能であることは容易にわかる[10]．こうして $T(\kappa)$ は，$\kappa=0$ のある近傍内のすべての κ について対角化可能となる．しかし小さな κ に対する $T(\kappa)$ の三つの固有値のピュイズー級数は

$$\pm\,\kappa^{3/2}+\cdots,\quad 1+\kappa^3+\cdots \tag{2.52}$$

なる形式を有し，このうちのふたつは $\kappa=0$ において正則ではない．

注意 2.11.　無限次元空間の場合は，さらに制限を加えないと定理 2.6 は成り立たない．微分作用素

$$T(\kappa)=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+2\kappa x$$

をヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(-\infty,+\infty)$ における線形作用素とみなして考えてみよう（このような微分作用素は，後の諸章において詳しく検討する[†]）．$T(\kappa)$ は次の式で与えられる固有値 $\lambda_n(\kappa)$ とそれに対応する固有函数 $\varphi_n(x,\kappa)$ の集合を有する．

$$\lambda_n(\kappa)=2n-\kappa^2,\qquad n=0,1,2,\dots,$$

$$\varphi_n(x,\kappa)=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2-\kappa x\right)H_n(x+\kappa).$$

ここで $H_n(x)$ はエルミットの多項式である．固有函数系 φ_n は，L^2 のあらゆる函

---

[10] $T(\kappa)$ の特性方程式は $\zeta^3-\zeta^2-\kappa^3=0$ である．この三次方程式は $\kappa=0$ あるいは $\kappa^3=-4/27$ となる場合を除いて，三つの異なる根をもち，$T(\kappa)$ は対角化可能である．しかし $T(0)$ が対角化可能であることは明らかであろう（それは既に対角行列になっている）．

数が，φ_n の一次結合によって任意の精度で近似しうるという意味において完全な集合である．この点はたとえば，$\exp(-(x+\mathrm{Re}\,\kappa)^2/2)\times(x$ の多項式$)$ なる形式の函数の集合が完全であること，またある函数に $\exp(-ix\,\mathrm{Im}\,\kappa)$ を乗ずる演算がユニタリ作用素であることに注意すれば了解されよう．したがって，$T(\kappa)$ はあらゆる有限の κ に対して **対角化可能**とみなすことができる．それにもかかわらず，$\lambda_n(\kappa)$ は κ について線形ではないのである．

6. 摂動級数の係数の階数

級数 (2.3) および (2.16) の係数 $P^{(n)}$, $\widetilde{T}^{(n)}$ はその階数についての際立った性質を有する．すなわち

$$\text{rank } P^{(n)} \leqq (n+1)m, \quad \text{rank } \widetilde{T}^{(n)} \leqq (n+1)m, \qquad n=1,2,\ldots \tag{2.53}$$

なる関係がこれであり，次の補題からただちに導かれる．

補題 2.12. $P(\kappa)\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ および $A(\kappa)\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ は $\kappa=0$ の近傍において κ に正則に依存するものとし，また $P(\kappa)$ はすべての κ について射影であるとする．さらに $A(\kappa)\,P(\kappa)$ は

$$A(\kappa)\,P(\kappa)=\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n B_n \tag{2.54}$$

なる展開をもつものとしよう．このとき $m=\dim P(0)$ とおくと

$$\text{rank } B_n \leqq (n+1)m, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.55}$$

が成り立つ．(2.54) の左辺を $P(\kappa)\,A(\kappa)$ で置き換えるときも同様の結果が成り立つ．

証明.

$$P(\kappa)=\sum_{n=0}^{\infty}\kappa^n P_n \tag{2.56}$$

とする．係数 P_n は

$$P_n = P_0 P_n + Q_{n1} P_0 P_{n-1} + \cdots + Q_{nn} P_0, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.57}$$

なる形式の漸化式を満たす．ここで Q_{nk} は $P_0, P_1, \cdots, P_n$ のある多項式である．(2.57) は帰納法によって証明される．まず等式 $P(\kappa)^2 = P(\kappa)$ から

$$P_n = P_0 P_n + P_1 P_{n-1} + \cdots + P_n P_0 \tag{2.58}$$

が得られ，これで $n = 1$ に対して (2.57) が示されたことになる．n を 1,2,$\cdots$,$n-1$ で置き換えたときに (2.57) が成り立つと仮定すれば，(2.58) から次の式が導かれる．

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 P_n + P_1 (P_0 P_{n-1} + Q_{n-1,1} P_0 P_{n-2} + \cdots + Q_{n-1,n-1} P_0) \\ &\quad + P_2 (P_0 P_{n-2} + Q_{n-2,1} P_0 P_{n-3} + \cdots + Q_{n-2,n-2} P_0) \\ &\quad + \cdots + P_n P_0 \\ &= P_0 P_n + P_1 P_0 P_{n-1} + (P_1 Q_{n-1,1} + P_2) P_0 P_{n-2} \\ &\quad + \cdots + (P_1 Q_{n-1,n-1} + P_2 Q_{n-2,n-2} + \cdots + P_n) P_0 . \end{aligned}$$

これは (2.57) の形式を有し，帰納法が完結する．

さて $A(\kappa) = \sum \kappa^n A_n$ が $A(\kappa)$ の展開であるとすれば，(2.54), (2.56) および (2.57) から次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} B_n &= A_0 P_n + A_1 P_{n-1} + \cdots + A_n P_0 \\ &= A_0 P_0 P_n + (A_0 Q_{n1} + A_1) P_0 P_{n-1} \\ &\quad + (A_0 Q_{n2} + A_1 Q_{n-1,1} + A_2) P_0 P_{n-2} \\ &\quad + \cdots + (A_0 Q_{nn} + A_1 Q_{n-1,n-1} + \cdots + A_n) P_0 . \end{aligned} \tag{2.59}$$

こうして B_n は $(n+1)$ 個の項の和であるが，そのそれぞれが因子 P_0 を含んでおり，したがって階数は rank P_0 を越えない（問題 I-3.4 を見よ）．これで所望の不等式 (2.55) が証明された．$A(\kappa) P(\kappa)$ のかわりに $P(\kappa) A(\kappa)$ について同様の結果を示すために，上の議論をいかに修正すべきか，それは自明であろう．

§ 3.　収束半径と誤差の評価

1.　単純な評価 [1]

これまでの諸節では，κ についてのいろいろな巾級数を，その収束については明示的な条件を与えることなく考えてきた．そこで本節では，そのような条件について論じよう．

まず (1.13) によって与えられる $R(\zeta,\kappa)$ の表現から始めよう．この級数は

$$\|A(\kappa)R(\zeta)\| = \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} \kappa^n T^{(n)}\right) R(\zeta)\right\| < 1 \tag{3.1}$$

に対して収束するが，これは

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\kappa|^n \, \|T^{(n)} R(\zeta)\| < 1 \tag{3.2}$$

ならば満たされる．(3.2) の左辺が 1 に等しくなるような $|\kappa|$ の値を $r(\zeta)$ としよう．すると (3.2) は $|\kappa| < r(\zeta)$ に対して満たされる．

曲線 Γ は §1.4 におけるものと同様としよう．

$$|\kappa| < r_0 = \min_{\zeta\in\Gamma} r(\zeta) \tag{3.3}$$

ならば，(1.13) が $\zeta \in \Gamma$ に対して一様収束し，したがって同一の条件 (3.3) の下に，全射影 $P(\kappa)$ に対する級数 (1.17) または (2.3) が収束することは容易に知られるであろう．こうして r_0 は $\widehat{\lambda}(\kappa)$ についての級数 (2.21) の，また $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ についての級数 (2.37) の収束半径の下界にもなっているのである．Γ は $\zeta = \lambda$ を囲み，しかし T の他の固有値は除外する，任意の単純，閉かつ求長可能な曲線でよいのだが，ここでは Γ が 凸 (convex) であることを仮定する．r_0 ができる限り大きくなるように Γ を選ぶのが便利である．

(2.21) の係数 $\widehat{\lambda}^{(n)}$ を評価するために，$T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値，し

---

[1] 函数論の初歩的な結果に基づく以下の方法は，Sz.-Nagy [1], [2], T. Kato [1], [3], [6], Schäfke [3], [4], [5] によって用いられている．

たがってまたその加重平均 $\widehat{\lambda}(\kappa)$ は，(3.3) が満たされる限り Γ の内側に位置するという事実を利用しよう[2].

$$\varrho = \max_{\zeta\in\Gamma} |\zeta - \lambda| \tag{3.4}$$

とおけば，(3.3) に対して函数 $\widehat{\lambda}(\kappa) - \lambda$ は正則で，しかも ϱ によっておさえられることがわかる．テイラー係数についてのコーシーの不等式[3]により，

$$|\widehat{\lambda}^{(n)}| \leqq \varrho r_0^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

が導かれる．

このような評価は，巾級数 (2.21) を有限個の項で打ち切ったときに生ずる誤差を評価するために有用である．すなわち

$$\left|\widehat{\lambda}(\kappa) - \lambda - \sum_{p=1}^{n} \kappa^p \widehat{\lambda}^{(p)}\right| \leqq \sum_{p=n+1}^{\infty} |\kappa|^p |\widehat{\lambda}^{(p)}| \leqq \frac{\varrho|\kappa|^{n+1}}{r_0^n(r_0 - |\kappa|)}. \tag{3.6}$$

例 3.1.　ある非負の定数 a, c に対して

$$\|T^{(n)}\| \leqq a c^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.7}$$

の成り立つことを仮定する．(1.2) は収束すると仮定しているので，そのような定数は常に存在する．さて，$a|\kappa|(1 - c|\kappa|)^{-1}\|R(\zeta)\| < 1$ ならば，つまり $|\kappa| < (a\|R(\zeta)\| + c)^{-1}$ ならば，(3.2) が満たされる．このようにして，収束半径に対する次のような下界を得る．

$$r_0 = \min_{\zeta\in\Gamma} \left(a\|R(\zeta)\| + c\right)^{-1}. \tag{3.8}$$

2.　優級数の方法

係数および収束半径を評価するためのいまひとつの方法は，優級数を組織的に利用するものである[4]．(1.13) および (2.29) に現われる函数 $A(\kappa)\,R(\zeta)$

---

[2] Γ の凸性がここで用いられている．

[3] Knopp【1】, p. 77 を見よ．

[4] 優級数を用いる試みは Rellich [4] に始まり，Schröder [1]-[3] によってさらに発展せしめられた．彼らの方法は，級数の係数に関する漸化方程式に基づくもので，以下において採用される函数論的方法とは異っている．

に対する**優函数**(majorizing function)（級数）$\varPhi(\zeta-\lambda,\kappa)$ を次のように導入しよう.

$$A(\kappa)\,R(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\,T^{(n)}\,R(\zeta) \lll \varPhi(\zeta-\lambda,\kappa) \tag{3.9}$$

$$\equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{kn}(\zeta-\lambda)^k\,\kappa^n\,.$$

この意味するところは，右辺の各係数 c_{kn} が，左辺を $\zeta-\lambda$ および κ についての二重級数に展開したときの対応する係数のノルム (norm) よりも小ではないこと，これである．$R(\zeta)$ は I-(5.18) の λ_h, P_h, D_h をそれぞれ λ, P, D で置き換えたローラン展開を有するので，これは次のことを意味する.

$$\|T^{(n)}\,D^k\|\leqq c_{-k-1,n}\,,\quad \|T^{(n)}\,P\|\leqq c_{-1,n}\,, \tag{3.10}$$

$$\|T^{(n)}\,S^k\|\leqq c_{k-1,n}\,,\quad k>0\,.$$

$k<-m$ に対しては $c_{kn}=0$ を仮定するので，$\varPhi(z,k)$ は $z=0$ においてひとつの極のみを有する．$D^m=0$ であるから，これは許されるであろう.

とくに (3.9) からは

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n\,T^{(n)}\,R(\zeta)\right\|\leqq\varPhi\big(|\zeta-\lambda|,\,|\kappa|\big) \tag{3.11}$$

が導かれる．こうして $\varPhi(|\zeta-\lambda|,\,|\kappa|)<1$ ならば，(1.13) の級数は収束する．Γ として円 $|\zeta-\lambda|=\varrho$ を選ぶことにすれば，$P(\kappa)$ ならびに $\widehat{\lambda}(\kappa)$ に対する級数の収束半径の下界 r は方程式

$$\varPhi(\varrho,r)=1 \tag{3.12}$$

の最小の正の根によって与えられる．その際，この根 r ができる限り大きくなるように ϱ を選んでおくのが便利である.

また $\varPhi$ は $\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ に対する優級数の構成に用いることもできる．そのような級数は次の式で与えられる.

$$\varPsi(\kappa)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-\lambda|=\varrho}-\log\big(1-\varPhi(\zeta-\lambda,\kappa)\big)\,d\zeta\,. \tag{3.13}$$

これを示すために，まず次のことに注意しよう．すなわち(2.9)を用いて(2.29)の被積分函数を κ および $\zeta-\lambda$ についての巾ローラン級数に展開するとき，積分に寄与するのは P または D の少なくとも一方を含む項だけであること，これである．そのような項の階数は必然的に $\leqq m$ であり，したがってそのトレースはノルムの m 倍を超えることはない［I-(5.42)を見よ］．このようにして，(2.29)の右辺における $1/m$ 項とトレース記号を除去し，被積分函数を展開した係数をそのノルムで置き換えれば，$\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ に対する優級数が得られるのである．この優函数はまた(3.13)によっておさえられるので，$\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ は(3.13)でおさえられることになる．

函数論でよく知られているとおり，(3.13)は円 $|z|=\varrho$ の内部に含まれる函数 $1-\Phi(z,\kappa)$ の零点の和から極の和を差し引いたものに等しい[5]．しかしこの函数の唯一の極は $z=0$ であって，上記の和に寄与することはない．かくして次の定理が得られる．

定理 3.2. $\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ に対する優級数は，$\kappa\to 0$ とするとき $z=0$ の近傍においては，函数 $1-\Phi(z,\kappa)$（z の函数として）の零点の和（を表現するテイラー級数）によって与えられる．ここで重根の零点は重複して数えるものとする．(3.12)の最小の正の根を r とするとき，この優級数，そしてより強い理由を以て $P(\kappa)$, $\widehat{\lambda}(\kappa)$ の級数は $|\kappa|<r$ に対して収束する．ここで ϱ は，円 $|\zeta-\lambda|=\varrho$ が λ 以外の T の固有値を含まない限り任意でよい．

例 3.3. $n\geqq 2$ に対しては $T^{(n)}=0$，かつ λ は T の半単純固有値 $(D=0)$ であるような特別な場合を考える．(3.10)から，$c_{-1,1}=\|T^{(1)}P\|$, $k\geqq 0$ に対しては $c_{k1}\geqq\|T^{(1)}S^{k+1}\|$, 他のすべての c_{kn} はゼロとしてよいことが知られる．c_{k1} の選択については，$SP=PS=0$ であるから，任意の α について $S^{k+1}=S(S-\alpha P)^k$ であることに注意する．こうして $c_{k1}=\|T^{(1)}S\|\|S-\alpha P\|^k$ とすることができ，優級数として

$$\Phi(z,\kappa)=\kappa\left(\frac{p}{z}+\frac{q}{1-s\,z}\right) \tag{3.14}$$

を得るのである．ここで

[5] Knopp【1】, p. 134 を見よ．部分積分により，$\int\log f(z)dz=-\int f'(z)\,f(z)^{-1}zdz$ であることに注意．

$$(3.15)\quad p = \|T^{(1)}P\|,\ q = \|T^{(1)}S\|,\ \text{任意の } \alpha \text{ に対して } s = \|S - \alpha P\|$$

である．小さな $|\kappa|$ に対しては，$z=0$ の近傍において $1-\Phi(z,\kappa)$ は唯一の零点 $z=\Psi(\kappa)$ を有する．定理 3.2 により，この $\Psi(\kappa)$ は $\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ に対する優級数である．簡単な計算により，

$$(3.16)\quad \begin{aligned}\Psi(\kappa) &= p\kappa + \frac{1}{2s}\big[1-(ps+q)\kappa - \Omega(\kappa)\big]\\ &= p\kappa + 2pq\kappa^2\big[1-(ps+q)\kappa + \Omega(\kappa)\big]^{-1}\\ &= p\kappa + pq\kappa^2 + \frac{2pq(ps+q)\kappa^3 + 2p^2q^2s\kappa^4}{1-(ps+q)\kappa - 2pqs\kappa^2 + \Omega(\kappa)}\end{aligned}$$

であり，ここで

$$(3.17)\quad \Omega(\kappa) = \Big\{\big[1-(ps+q)\kappa\big]^2 - 4pqs\kappa^2\Big\}^{1/2}.$$

$\Psi(\kappa)$ の巾級数の各係数が，$\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ に対する級数の，対応する係数の上界を与える．それゆえこの級数の第 n 次項以後が，$\widehat{\lambda}(\kappa)$ の第 n 次項以後を上からおさえることとなる．こうして，(3.16) の第二，第三の表現から，次の結果が得られる．

$$(3.18)\quad \begin{aligned}&\big|\widehat{\lambda}(\kappa) - \lambda - \kappa\widehat{\lambda}^{(1)}\big|\\ &\qquad \leqq 2pq|\kappa|^2 \big/ \big[1-(ps+q)|\kappa| + \Omega\big(|\kappa|\big)\big],\end{aligned}$$

$$(3.19)\quad \begin{aligned}&\big|\widehat{\lambda}(\kappa) - \lambda - \kappa\widehat{\lambda}^{(1)} - \kappa^2\widehat{\lambda}^{(2)}\big|\\ &\qquad \leqq \frac{2pq|\kappa|^3(ps+q+pqs|\kappa|)}{1-(ps+q)|\kappa| - 2pqs|\kappa|^2 + \Omega(|\kappa|)}.\end{aligned}$$

(3.14) を (3.12) に代入すると，$P(\kappa)$ および $\widehat{\lambda}(\kappa)$ の級数に関する収束半径の下界 r が得られる．ϱ の選択を

$$(3.20)\quad \varrho = p^{1/2}s^{-1/2}\big[(ps)^{1/2} + q^{1/2}\big]^{-1}$$

とすれば，最適値[6]

$$(3.21)\quad r = \big[(ps)^{1/2} + q^{1/2}\big]^{-2}$$

が与えられる．T の固有値 λ の**孤立度** (isolation distance)（λ と T のそのほか

---

[6] これはまた (3.16) からもわかる．r が (3.21) によって与えられたとき，(3.16) は $|\kappa| < r$ に対して収束する展開を有する．

の固有値 λ_k との距離）を d とするとき，$\varrho \leqq s^{-1} = \|S - \alpha P\|^{-1} \leqq d$ であることから，(3.20) のような選択が許されることに注意しておこう．実際，I-(5.32) により，$u = P_k u$（$j \neq k$ に対しては $P_j P_k = 0$，また $PP_k = 0$ に注意）ならば $(S - \alpha P)u = -(\lambda - \lambda_k)^{-1} u$ が導かれる．それゆえ $\|S - \alpha P\| \geqq |\lambda - \lambda_k|^{-1}$ がすべての k について成り立つのである．

問題 3.4.　例 3.3 において，

$$|\widehat{\lambda}^{(1)}| \leqq p, \quad |\widehat{\lambda}^{(2)}| \leqq pq, \quad |\widehat{\lambda}^{(3)}| \leqq pq(ps+q), \ldots \tag{3.22}$$

が成り立つ．

注意 3.5.　$P(\kappa)$ の級数もまた優函数 Φ を用いて評価することができる．(1.16), (1.13) および (3.9) により，

$$P(\kappa) \lll \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - \lambda| = \varrho} \Phi_1(\zeta - \lambda)\bigl(1 - \Phi(\zeta - \lambda, \kappa)\bigr)^{-1} d\zeta \tag{3.23}$$

である．ここで $\Phi_1(\zeta - \lambda)$ は $R(\zeta)$ 対する優級数である．例 3.3 のように Φ および Φ_1 が明示的に与えられれば，右辺は留数の方法によって計算することができる．

3.　固有ベクトルの評価

固有射影よりはむしろ固有ベクトルを計算する必要がしばしば生ずる．しかし固有ベクトルは一意的に定まらないから，κ の函数として $T(\kappa)$ の固有ベクトルを表わすはっきりした公式は何も存在しないのである．簡単化のために $m = 1$（したがって $D = 0$）を仮定するならば，$T(\kappa)$ の，$\lambda(\kappa)$ に対応する固有ベクトル $\varphi(\kappa)$ を表わす便利な形式が

$$\varphi(\kappa) = \bigl(P(\kappa)\varphi, \psi\bigr)^{-1} P(\kappa)\varphi \tag{3.24}$$

によって与えられる．ここで φ は T の固有値 λ に対する非摂動固有ベクトルであり，また ψ は，T^* の固有値 $\overline{\lambda}$ に対する固有ベクトルで，しかも $(\varphi, \psi) = 1$ を満たすように正規化されているものとする．こうして

$$P\varphi = \varphi, \quad P^*\psi = \psi, \quad (\varphi, \psi) = 1 \tag{3.25}$$

である．$P(\kappa)\mathsf{X}$ は一次元なので，(3.24) が $T(\kappa)$ の固有ベクトルであることは自明であろう．(3.24) の因子の選び方は，次の正規化の条件のおのおのと同等である．

$$(3.26)\quad \bigl(\varphi(\kappa),\psi\bigr)=1,\quad \bigl(\varphi(\kappa)-\varphi,\psi\bigr)=0,\quad P\bigl(\varphi(\kappa)-\varphi\bigr)=0\,.$$

$(T(\kappa)-\lambda(\kappa))\varphi(\kappa)=0$ という関係は

$$(3.27)\qquad \bigl(T-\lambda\bigr)\bigl(\varphi(\kappa)-\varphi\bigr)+\bigl(A\,(\kappa)-\lambda(\kappa)+\lambda\bigr)\,\varphi(\kappa)=0$$

と書き表わすことができる．ここで $A(\kappa)=T(\kappa)-T$ である［$(T-\lambda)\varphi=0$ であることに注意］．(3.27) の左から S を乗じ，$S(T-\lambda)=1-P$ および (3.26) を用いれば，

$$(3.28)\qquad \varphi(\kappa)-\varphi+S\bigl[A\,(\kappa)-\lambda(\kappa)+\lambda\bigr]\,\varphi(\kappa)=0$$

を得る．さらに $S\varphi=0$ に留意すると［(3.28) の最後の項のうち，$\varphi(\kappa)=\varphi(\kappa)-\varphi+\varphi$ と書くこととして］，次の関係を得る．つまり κ が十分に小さい場合，

$$(3.29)\quad \begin{aligned}\varphi(\kappa)-\varphi&=-\bigl(1+S\bigl[A\,(\kappa)-\lambda(\kappa)+\lambda\bigr]^{-1}S\,A\,(\kappa)\,\varphi\\&=-S\bigl[1+A\,(\kappa)\,S-\bigl(\lambda(\kappa)-\lambda\bigr)\bigr)\,S_\alpha\bigr]^{-1}A\,(\kappa)\,\varphi\,.\end{aligned}$$

ここで $S_\alpha=S-\alpha P$ であり，α は任意である．これが固有ベクトルを計算するのに便利な公式である．

とくに (3.29) を用いると，$\varphi(\kappa)-\varphi$ に対する，次のような優級数が得られる．

$$(3.30)\qquad \varphi(\kappa)-\varphi\lll\|S\|\,\bigl(1-\Phi_2(\kappa)-\|S_\alpha\|\,\Psi(\kappa)\bigr)^{-1}\,\Phi_3(\kappa)\,.$$

ここで $\Phi_2(\kappa)$, $\Phi_3(\kappa)$ はそれぞれ $A(\kappa)S$, $A(\kappa)\varphi$ に対する優級数である[7]［$\Psi(\kappa)$ は $\lambda(\kappa)-\lambda$ に対する優級数であることに注意］．$|\kappa|$ がきわめて小さく (3.30) の右辺が $\|\varphi\|$ より小さい場合，固有ベクトル $\varphi(\kappa)$ は有用である．なぜならその場合，$\varphi(\kappa)$ は確かにゼロではないからである．

---

[7] ベクトル値函数に対する優級数（函数）も，作用素値函数の場合と同様の方法で定義することができる．

(3.29) の左から $T-\lambda$ を乗ずると，

$$(3.31)\qquad (T-\lambda)\,\varphi(\kappa) = -(1-P)\bigl[1 + A(\kappa)\,S - \bigl(\lambda(\kappa)-\lambda\bigr)\,S_\alpha\bigr]^{-1} A(\kappa)\,\varphi$$

が得られ，したがって

$$(3.32)\qquad \bigl(T-\lambda\bigr)\,\varphi(\kappa) \lll \bigl(1 - \Phi_2(\kappa) - \|S_\alpha\|\,\Psi(\kappa)\bigr)^{-1}\,\Phi_3(\kappa)$$

が成り立つ．

例 3.6.　$n \geqq 2$ に対して $T^{(n)} = 0$ とすれば，$A(\kappa) = \kappa T^{(1)}$ であり，したがって

$$(3.33)\qquad \Phi_2(\kappa) = \kappa\,\|T^{(1)}\,S\| = \kappa\,q, \quad \Phi_3(\kappa) = \kappa\,\|T^{(1)}\,\varphi\|$$

としてよい．こうして (3.16) を代入すると，(3.30) および (3.32) からは ($s_0 = \|S\|$),

$$(3.34)\qquad \varphi(\kappa) - \varphi \lll \frac{2\,\kappa\,s_0\,\|T^{(1)}\,\varphi\|}{1-(p\,s+q)\kappa + \Bigl\{\bigl(1-(p\,s+q)\kappa\bigr)^2 - 4\,p\,q\,s\,\kappa^2\Bigr\}^{1/2}},$$

(3.35)　$(T-\lambda)\,\varphi(\kappa) \lll$ [(3.34) の右辺から s_0 を除いた式].

問題 3.7.　例 3.6 の仮定の下に，$|\kappa| < r$ [r は (3.21) によって与えられる] に対して次の関係が成り立つ．

$$(3.36)\qquad \varphi(\kappa) = \varphi - \kappa\,S\,T^{(1)}\,\varphi + \kappa^2\,S\,\bigl(T^{(1)} - \lambda^{(1)}\bigr)\,S\,T^{(1)}\,\varphi - \cdots,$$

$$(3.37)\qquad \varphi(\kappa) - \varphi \lll s_0\,\kappa\bigl(1 + (p\,s+q)\kappa + \cdots\bigr)\,\|T^{(1)}\,\varphi\|,$$

$$(3.38)\qquad \|\varphi(\kappa) - \varphi\| \leqq |\kappa|\,\frac{s_0}{(p\,q\,s)^{1/2}}\,\bigl((p\,s)^{1/2} + q^{1/2}\bigr)^2 \|T^{(1)}\,\varphi\|,$$

$$(3.39)\qquad \|\varphi(\kappa) - \varphi + \kappa\,S\,T^{(1)}\,\varphi\| \leqq |\kappa|^2\,\frac{s_0}{(p\,q\,s)^{1/2}}\,\bigl((p\,s)^{1/2} + q^{1/2}\bigr)^2 \bigl(p\,s + q + (p\,q\,s)^{1/2}\bigr),$$

(3.40)　$\bigl\|(T-\lambda)(\varphi(\kappa)-\varphi)\bigr\| \leqq s_0^{-1}$[(3.38) の右辺].

(3.41)　$\bigl\|(T-\lambda)(\varphi(\kappa)-\varphi+\kappa\,S\,T^{(1)}\,\varphi)\bigr\| \leqq s_0^{-1}$[(3.39) の右辺].

[(3.38) (3.39) へのヒント：優級数からそれぞれ因子 $|\kappa|$, $|\kappa|^2$ を除き，しかるのちに $\kappa = r$ とおけ.]

4. 誤差評価続論

$\widehat{\lambda}(\kappa)$ の級数を有限の項で切ったときの残余の評価は実際上の重要性をもち，この点に鑑て，(3.5) または優級数 (3.13) による以外の，係数 $\widehat{\lambda}^{(n)}$ の評価を示しておこう．

$\widehat{\lambda}^{(n)}$ の積分表現 (2.30) を次の形に書くことにする．

(3.42)

$$\widehat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i m} \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_p=n} \frac{(-1)^p}{p} \int_\Gamma \operatorname{tr}\left[T^{(\nu_1)} R(\zeta) \cdots T^{(\nu_p)} R(\zeta) \right. \\ \left. - T^{(\nu_1)} S(\zeta) \cdots T^{(\nu_p)} S(\zeta)\right] d\zeta .$$

ここで $S(\zeta)$ は固有値 λ に関する T の被約レゾルベントである（I-§5.3 を見よ）．すなわち

$$R(\zeta) = R_0(\zeta) + S(\zeta), \quad R_0(\zeta) = P R(\zeta) = R(\zeta) P \tag{3.43}$$

は，$R(\zeta)$ の極 $\zeta = \lambda$ における主部および正則部分への分解となっている．(3.42) の [　] 内の第二項は正則であり，積分には寄与しないことに注意しておこう．すると [　] 内のこの表現は

$$\begin{aligned} & T^{(\nu_1)} R_0(\zeta) T^{(\nu_2)} R(\zeta) \cdots T^{(\nu_p)} R(\zeta) \\ & \quad + T^{(\nu_1)} S(\zeta) T^{(\nu_2)} R_0(\zeta) \cdots T^{(\nu_p)} R(\zeta) \\ & \quad + \cdots + T^{(\nu_1)} S(\zeta) \cdots T^{(\nu_{p-1})} S(\zeta) T^{(\nu_p)} R_0(\zeta) \end{aligned} \tag{3.44}$$

に等しく，その各項が $R_0(\zeta) = PR(\zeta)$ なる一因子を含んでいる．この因子の階数は $\leqq m$ であるから，(3.44) の各項についても同様で，したがって $N = \dim \mathsf{X}$ とするとき，(3.44) の階数は $\min(pm, N)$ を超えない．このように，(3.42) におけるトレースの絶対値は $\min(pm, N)$ にこの表現のノルムを乗じた大きさで上をおさえられる [I-(5.42) を見よ]．これから次の評価が導かれるのである．

(3.45)

$$|\widehat{\lambda}^{(n)}| \leqq \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_p=n} \min\left(1, \frac{N}{pm}\right) \int_\Gamma \left\| T^{(\nu_1)} R(\zeta) \cdots T^{(\nu_p)} R(\zeta) \right.$$

$$- T^{(\nu_1)} S(\zeta) \dots T^{(\nu_p)} S(\zeta) \Big\| \, |d\zeta| .$$

$n \geqq 2$ に対して $T^{(n)} = 0$ となる特別の場合は，幾分異った評価を得ることができる．この場合は，(2.34) が成り立つわけだが，(2.53) により，$P^{(n-1)}$ は rank $\leqq \min(nm, N)$ である．したがって，再びトレースを $\min(nm, N)$ にノルムを乗じた大きさで評価し，

$$(3.46) \qquad |\widehat{\lambda}^{(n)}| \leqq \min\left(1, \frac{N}{n\,m}\right) \left\| T^{(1)} P^{(n-1)} \right\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

を得る．他方，(2.8) から

$$\begin{aligned}(3.47) \qquad \left\| T^{(1)} P^{(n-1)} \right\| &\leqq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left\| \left(T^{(1)} R(\zeta)\right)^n \right\| \, |d\zeta| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left\| T^{(1)} R(\zeta) \right\|^n |d\zeta| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi} \, \|T^{(1)}\|^n \int_\Gamma \left\| R(\zeta) \right\|^n |d\zeta|\end{aligned}$$

が導かれる．そして (3.47) を (3.46) に代入すれば，$\widehat{\lambda}^{(n)}$ の評価が与えられるのである．

注意 3.8.　最後の仮定の下で，$n \geqq 2$ に対する (3.46–3.47) の $T^{(1)}$ は $T^{(1)} - \alpha$ で置き換えることができる．α は任意のスカラーである．これは，$T^{(1)}$ を $T^{(1)} - \alpha$ で置き換えても，$T(\kappa)$ が蒙る変更は $-\alpha\kappa$ という項が加わるだけで，$n \geqq 2$ に対して $\widehat{\lambda}^{(n)}$ には影響が及ばないからである．とくに (3.47) の最後の式のうち $\|T^{(1)}\|$ は

$$(3.48) \qquad a_0 = \min_\alpha \left\| T^{(1)} - \alpha \right\|$$

で置き換えてもよい．

5.　正規非摂動作用素の特殊事例

X がユニタリ空間で，T が正規作用素という特別の場合は，これまでに得られた収束半径や誤差評価についての結果がはるかに単純になる．このとき

は I-(6.70) により，すべての $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ に対して

$$\|R(\zeta)\| = 1/\mathrm{dist}\,(\zeta, \Sigma(T)). \tag{3.49}$$

さらに $T^{(n)}$ が不等式 (3.7) を満たすことを仮定すれば，(3.8) から $P(\kappa)$, $\widehat{\lambda}(\kappa)$ の収束半径の下界として

$$r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} \left(\frac{a}{\mathrm{dist}\,(\zeta, \Sigma(T))} + c \right)^{-1} \tag{3.50}$$

が導かれる．T の固有値 λ の孤立度を d とするとき（第 2 項を見よ），Γ として円 $|\zeta - \lambda| = d/2$ を選ぶことにすれば，

$$r_0 = \left(\frac{2a}{d} + c \right)^{-1} \tag{3.51}$$

となる．

本項ではこれ以降，$n \geqq 2$ に対して $T^{(n)} = 0$ を仮定する．このとき $c = 0, a = \|T^{(1)}\|$ とすることができ，また (3.51) は

$$r_0 = d/2a = d/2\,\|T^{(1)}\| \tag{3.52}$$

となる．換言すれば，次の定理が得られるのである．

定理 3.9[8]**.** X をユニタリ空間，$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)}$ とし，また T は正規作用素とする．このとき，“摂動の大きさ” $\|\kappa T^{(1)}\|$ が，T の固有値 λ の孤立度の半分より小さいならば，$P(\kappa)$ および $\widehat{\lambda}(\kappa)$ の巾級数は収束する．

ここで 1/2 という因子は，次の例から知られるとおり最良のものである．

例 3.10. 例 1.1, a) を考えよう．X には標準基底についてのユニタリ・ノルム I-(6.6) を導入し，またこの基底についての $T(\kappa)$ の行列表現が a) であるものとする．すると T は正規であり（対称でさえある），$\|T^{(1)}\| = 1$，かつ T のふたつの固有値 ± 1 のおのおのについて $d = 2$ であることは容易に確かめることができる．しかし級数 (1.4) の収束半径は，(3.52) によって与えられる $r_0 = 1$ に正確に等しい．

[8] T. Kato [1], Schäfke [4] を見よ．

注意 3.11.　注意3.8と同じ理由により，(3.52) の $a = \|T^{(1)}\|$ は (3.48) によって与えられる a_0 で置き換えることができる．

係数 $\widehat{\lambda}^{(n)}$ については，公式 (3.5) により，

$$|\widehat{\lambda}^{(1)}| \leqq a, \quad |\widehat{\lambda}^{(n)}| \leqq a_0^n \left(\frac{2}{d}\right)^{n-1}, \quad n \geqq 2 \tag{3.53}$$

が成り立つ (注意3.11を見よ)．それは考察の対称となっている Γ が $\varrho = d/2$ を満たすことからわかる．同じ Γ を用いると，公式 (3.46–3.47) から同一の帰結 (3.53) に達するのである．

しかし (3.46) によると，ある種の特別な場合には，(3.53) よりも精密な評価を得ることができる．たとえば，T が **対称的**で，したがって T の固有値が実である場合がそれにあたる．T の固有値 λ を考えることとし，λ よりも小さな T の固有値のうちで最大のものを λ_1，λ よりも大きな固有値のうちで最小のものを λ_2 とする．するとこの場合 Γ としては，$(\lambda+\lambda_1)/2$ および $(\lambda+\lambda_2)/2$ を通り，実軸に垂直な直線の組 Γ_1, Γ_2 をとることができる．いま

$$d_1 = \lambda - \lambda_1, \quad d_2 = \lambda_2 - \lambda \tag{3.54}$$

とおくことにより，

$$\|R(\zeta)\| = \left(\frac{d_j^2}{4} + \eta^2\right)^{-1/2}, \ \zeta \in \Gamma_j, \ j = 1, 2, \ \eta = \operatorname{Im} \zeta \tag{3.55}$$

を得る．それゆえ (3.46–3.47) と注意3.8により，$n \geqq 2$ については

(3.56)

$$\begin{aligned} |\widehat{\lambda}^{(n)}| &\leqq \frac{1}{2\pi} \min\left(1, \frac{N}{nm}\right) a_0^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d_1^2}{4} + \eta^2\right)^{-\frac{n}{2}} d\eta \right. \\ &\qquad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d_2^2}{4} + \eta^2\right)^{-\frac{n}{2}} d\eta \right] \\ &= \min\left(1, \frac{N}{nm}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} a_0^n \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{d_1}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{d_2}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

が導かれる．ここで Γ はガンマ函数を表わしている．λ が T の最小または最大の固有値ならば，それぞれ $d_1 = \infty$ あるいは $d_2 = \infty$ となしうることには注意すべきで，これによって結果が改善されるのである．

興味深いことに，次の例に見るとおり，(3.56) は“最良”のものであることがわかる．

例 3.12. 再び例 3.10 を考えよう．$N = 2$, $\lambda = 1$, $m = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = \infty$, $a_0 = \|T^{(1)}\| = 1$ であり，(3.56) から

$$|\lambda^{(n)}| = |\widehat{\lambda}^{(n)}| \leqq \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, n\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{3.57}$$

を得る．正しい固有値 $\lambda(\kappa)$ は

$$\lambda(\kappa) = (1+\kappa^2)^{1/2} = \sum_{p=0}^{\infty} \binom{1/2}{p} \kappa^{2p} \tag{3.58}$$

となる．この級数における κ^n の係数 $\lambda^{(n)}$ は，偶数の n に対しては $\binom{1/2}{n/2}$ であり，これはちょうど (3.57) の右辺に等しい．

(3.56) の因子 $\alpha_n = \Gamma(\frac{n-1}{2})/\sqrt{\pi}\ \Gamma(\frac{n}{2})$ は，小さな n に対しては，次のような値を有する．

n	α_n
2	$1 = 1.0000$
3	$2/\pi = 0.6366$
4	$1/2 = 0.5000$
5	$4/3\pi = 0.4244$
6	$3/8 = 0.3750$

$n \to \infty$ のとき，α_n は漸近値 $n^{-1/2}$ を有する[9]．こうして (3.56) によれば，$\widehat{\lambda}^{(n)}$ の位数はたかだか

$$\text{const.} \left(\frac{2}{d}\right)^{n-1} n^{-3/2}, \quad d = \min(d_1, d_2) \tag{3.59}$$

[9] Γ 函数は漸近公式 $\Gamma(x+1) = (2\pi)^{1/2}\, x^{x+1/2}\, e^{-x}(1+O(x^{-1}))$ を有する．

である．$N=\infty$ の場合は，$n^{-3/2}$ は $n^{-1/2}$ で置きかえなければならない．そして N が有限の場合でも，それが大きいときには，実際上の目的に照らしてこうしなければならないのである．

問題 3.13.　(3.56) は (3.53) よりも精密である．

問題 3.14.　例 3.10 において，(3.57) の等式が偶数 n について成り立つのはなぜか．

さてこれらの結果を，優級数の方法によって与えられる評価と比較してみよう．まず T が正規であることを仮定しているので，

$$D=0, \quad \|P\|=1, \quad \|S\|=1/d \tag{3.60}$$

であることに注意する．(3.15) を $p=\|T^{(1)}\|=a$, $q=\|T^{(1)}\|\|S\|=a/d$ および $s=\|S\|=1/d$ で置き換えると，収束半径の下界として $r=d/4a$ が得られる．これは (3.52) のちょうど半分の値である．他方，$\widehat{\lambda}(\kappa)-\lambda$ の優級数 (3.16) は，これらの代入の結果，

$$\begin{aligned}\Psi(\kappa)&=a\kappa+\frac{1}{d}\cdot\frac{2a^2\kappa^2}{1-\dfrac{2a\kappa}{d}+\left(1-\dfrac{4a\kappa}{d}\right)^{1/2}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}2^{2n-1}\frac{a^n}{d^{n-1}}\kappa^n\end{aligned} \tag{3.61}$$

となる．この優級数から得られる $\widehat{\lambda}^{(n)}$ の評価は

$$\begin{aligned}&\left|\widehat{\lambda}^{(1)}\right|\leqq a, \quad \left|\widehat{\lambda}^{(2)}\right|\leqq a_0^2/d,\\&\left|\widehat{\lambda}^{(3)}\right|\leqq 2a_0^3/d^2, \quad \left|\widehat{\lambda}^{(4)}\right|\leqq 5a_0^4/d^3,\ldots\end{aligned} \tag{3.62}$$

である（a の a_0 による置き換えは注意 3.8 によって是認される）．$n\leqq 5$ については，(3.62) は (3.53) よりも精密である．しかし $n\geqq 6$ については然らず．$n\leqq 3$ については，(3.62) はまた (3.56) よりも精密である（d_1, d_2 を d で置き換える）．しかし $n\geqq 4$ については然らず．いずれの場合も，優級数ははじめの数項の係数に対してはかなり精密な評価を与えるが，後方の係数については事情が異なる．同様にして，固有函数に対する優級数 (3.34) は（$m=1$ の場合）

$$\varphi(\kappa)-\varphi\ll\frac{2\kappa\left\|T^{(1)}\varphi\right\|/d}{1-\dfrac{2a\kappa}{d}+\left(1-\dfrac{4a\kappa}{d}\right)^{1/2}} \tag{3.63}$$

$$= \frac{\|T^{(1)}\varphi\|}{d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n+1} 2^{2n+1} \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1} \kappa^n$$

となる．展開 $\varphi(\kappa) - \varphi = \sum \kappa^n \varphi^{(n)}$ のはじめの数項の係数については，これから（上と同様に a を a_0 で置き換え）

(3.64) $$\|\varphi^{(1)}\| \leqq \|T^{(1)}\varphi\|/d,\ \|\varphi^{(2)}\| \leqq 2\|T^{(1)}\varphi\|\, a_0/d^2,$$
$$\|\varphi^{(3)}\| \leqq 5\|T^{(1)}\varphi\|\, a_0^2/d^3,\ \|\varphi^{(4)}\| \leqq 14\|T^{(1)}\varphi\|\, a_0^3/d^4, \ldots$$

が導かれる．ここで上と同じ理由から，$\|T^{(1)}\varphi\|$ は $\min_\alpha \|(T^{(1)} - \alpha)\varphi\|$ で置き換えてもよい[10]．

6. 枚挙法

$\widehat{\lambda}^{(n)}$ の評価は，明示的な公式 (2.31) の項の数を直接に計算することによっても得られる[11]．この方法を示すために，簡単化のために X はユニタリ空間，$n \geqq 2$ に対しては $T^{(n)} = 0$，そして T は正規であることを仮定する．$S^{(k)} = S^k$, $S^{(0)} = -P$, $k > 0$ については $S^{(-k)} = D^k = 0$ であることを想起し，また (3.60) に注意すると，

(3.65) $$\left|\widehat{\lambda}^{(n)}\right| \leqq \frac{1}{n\,m} \sum_{k_1+\cdots+k_n=n-1} \left|\mathrm{tr}\ T^{(1)} S^{(k_1)} \cdots T^{(1)} S^{(k_n)}\right|$$

を得る．さて (3.65) において記号 tr につづく表現は，すくなくともひとつ $S^{(0)} = -P$ の因子を含んでいる．したがってこの表現の階数は $\leqq m$ である．ゆえに先と同様，このトレースは m とこの作用素のノルムとの積によって上をおさえられるから，

(3.66) $$\left|\widehat{\lambda}^{(n)}\right| \leqq \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} \frac{a_0^n}{d^{n-1}} \equiv \beta_n\, a_0^n \left(\frac{2}{d}\right)^{n-1}, \quad n \geqq 2$$

が得られる．ここで上と同じ理由から，$\|T^{(1)}\|$ を a_0 で置き換えた．数の因子 $2^{n-1} n\,\beta_n = (2n-n)!/((n-1)!)^2$ は $k_1 + \cdots + k_n = n-1$ の解の数である．n の小さな値については，β_n の値は次のようになる．

10 関連する結果については，Rellich [4] および Schröder [1]-[3] を見よ．
11 Bloch [1] を参照．

n	β_n
2	$1 = 1.0000$
3	$1/2 = 0.5000$
4	$5/8 = 0.6250$
5	$7/8 = 0.8750$
6	$21/16 = 1.3125$

これによれば，評価 (3.66) が単純評価 (3.53) より精密であるのは，$n \leqq 5$ に対してのみであることがわかる．実際，$n \to \infty$ とするとき，β_n は漸近値 $\pi^{-1/2} n^{-3/2} 2^{n-1}$ をもち，これは 1 と比較すればきわめて大きな値なのである．

実は (3.66) は，優級数によって得られた結果の一特殊ケースにすぎない．(3.66) は $n \geqq 2$ に対してはまさに (3.61) の第 n 係数になっている（ここでも a を a_0 で置き換える）．

こうして枚挙法はなんら新しい結果を与えるものではない．さらに優級数の方法に比べて，それは適用範囲もより限定されたものである．なぜなら，係数 $\widehat{\lambda}^{(n)}$ を枚挙法を用いて効率的に評価することは，より一般的な場合には容易でないからである．

要約すると，一般に優級数法は，とくに級数のはじめの数項については，閉じた形式でかなり精密な評価を与えると結論することができよう．しかしながら，この方法において，作用素の特殊の性質（たとえば正規性）を勘案することは困難である．そのような特殊な場合には，線積分というより簡単な方法が一層有効であるように思われる．これまでのところ，(3.50), (3.51) および (3.52) の評価はこの方法によってのみ導出されたのである．

§ 4.　固有空間・固有ベクトルの相似変換

1.　固有ベクトル

固有値問題の摂動論を論じたこれまでの諸節においては，(§3.3 を除いて) 固有ベクトルよりもむしろ固有射影を考察した．それは固有ベクトルが一意

的には決まらないからである．しかしある場合には，摂動作用素 $T(\kappa)$ の，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ に対する固有ベクトル $\varphi_h(\kappa)$ を表現する必要が生ずる．本節ではそのような公式を導出するのであるが，さしあたって**一般化された固有ベクトル** (generalized eigenvector) を考えることで満足することにしたい．ここで一般化された固有ベクトルとは，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ に対する代数的固有空間 $\mathsf{M}_h(\kappa) = P_h(\kappa)\mathsf{X}$ に属する任意のゼロでないベクトルを意味する（I-§5.4 を見よ）．$\lambda_h(\kappa)$ が半単純の場合には，一般化された固有ベクトルは，もちろん，本来の意味での固有ベクトルになる．

φ_k を X における固定された一次独立なベクトル系とするとき，これらの固有ベクトルは

$$\varphi_{hk}(\kappa) = P_h(\kappa)\varphi_k \tag{4.1}$$

とおくことによって得られる．各 h, k に対して，$\varphi_{hk}(\kappa)$ は κ の解析函数で，**それがゼロでない限り**，$T(\kappa)$ の一般化された固有ベクトルを表現する．しかし，一般化された固有ベクトルのこのような構成法は，かなり技巧的であるという事実を別にしても，次のような不便を伴うのである．第一に，$\lambda_h(\kappa)$ または $P_h(\kappa)$ の特異点ではない，ある κ について，$\varphi_{hk}(\kappa)$ がゼロになる可能性があることである．第二に，相異なる k について $\varphi_{hk}(\kappa)$ が必ずしも一次独立でないことである．実際，重複度 m_h の $\lambda_h(\kappa)$ に対して，m_h 個以上の一次独立な固有ベクトルは存在しないのである．

κ_0 を固定された非例外点とするとき，ベクトル φ_k を部分空間 $\mathsf{M}_h(\kappa_0)$ から選ぶことによって，この不便はある程度回避されるかもしれない．こうしてちょうど m_h 個の一次独立なベクトル $\varphi_k \in \mathsf{M}_h(\kappa_0)$ を選ぶことができ，その結果，固定された h について定義される m_h 個のベクトル (4.1) は，$P_h(\kappa)$ が $\kappa = \kappa_0$ において正則であるから，十分に小さな $|\kappa - \kappa_0|$ については一次独立となる．$\dim \mathsf{M}_h(\kappa) = m_h$ なのであるから，m_h 個のベクトル $\varphi_{hk}(\kappa)$ は $\mathsf{M}_h(\kappa)$ の基底を成す．このようにして，κ に正則に依存する $\mathsf{M}_h(\kappa)$ の基底が得られたのである．

だが，これでもまだ十分ではない．なぜなら例外点でないある点 κ において，$\varphi_{hk}(\kappa)$ が一次独立でない（そしてそのうちのあるものはゼロになる）可能性が残るからである．これらの困難を克服するふたつの相異なる方法を呈

示することにしよう．次項では，$\mathsf{M}_h(0)$ を $\mathsf{M}_h(\kappa)$ の上に写す，大域的な変換函数を構築するために微分方程式に基づく方法を用いる．そして後段（第 7 項），上に述べた $\varphi_{hk}(\kappa)$ の特異性を除去する，より直接的な方法について論じようと思う．

2.　変換函数[1]

われわれの問題は，次のような一般的な形式で述べることができる．X における射影 $P(\kappa)$ が与えられており，それは κ-平面の領域 D において，κ について正則であることを仮定する．すると補題 I-4.10 により，$\dim P(\kappa)\mathsf{X} = m$ は一定である．このとき κ について正則で，すべての $\kappa \in$ D に対して $\mathsf{M}(\kappa) = P(\kappa)\mathsf{X}$ の基底を成す m 個のベクトル $\varphi_k(\kappa)$, $k = 1, \cdots, m$ を見出さねばならないのである．

一般性を失うことなく，$\kappa = 0$ が D に属することを仮定してよい．もし次のような性質をもつ作用素値の函数 $U(\kappa)$ [今後これを $P(\kappa)$ に対する **変換函数** (transformation function) と呼ぶ] を構成できるならば，われわれの問題は解けたことになるであろう．

(1) $\kappa \in$ D に対して逆 $U(\kappa)^{-1}$ が存在し，$U(\kappa)$ と $U(\kappa)^{-1}$ の双方が正則．

(2) $U(\kappa)P(0)U(\kappa)^{-1} = P(\kappa)$.

第二の性質から，$U(\kappa)$ は $\mathsf{M}(0)$ を $\mathsf{M}(\kappa)$ の上に，一対一に写すことがわかる（I-§5.7 を見よ）．$\{\varphi_k\}$, $k = 1, \cdots, m$ を $\mathsf{M}(0)$ の基底とすれば，ベクトル

$$\varphi_k(\kappa) = U(\kappa)\,\varphi_k\,, \quad k = 1, \ldots, m \tag{4.2}$$

が $\mathsf{M}(\kappa)$ の基底を成し，これで問題が解けるのである．

さてそこで，D が **単連結** であるという仮定の下で，上記の性質をもつ $U(\kappa)$ を構成することとしよう．まず

$$P(\kappa)^2 = P(\kappa) \tag{4.3}$$

[1] 本項および以下の諸項の結果は，量子力学の断熱定理との関連において，T. Kato [2] の得たものである．

であるから，微分して

$$P(\kappa)\,P'(\kappa) + P'(\kappa)\,P(\kappa) = P'(\kappa) \tag{4.4}$$

を得る．ここで微分 $d/d\kappa$ を表わすのに $'$ という記号を用いている．(4.4) の左右両側から $P(\kappa)$ を乗じ，(4.3) に留意すると［簡単化のため，$P(\kappa)$ と書くべきところを P と略記する．その他も同様］，

$$P\,P'\,P = 0\,. \tag{4.5}$$

いま P' および P の**交換子**(commutator) Q を

$$Q(\kappa) = \big[P'(\kappa), P(\kappa)\big] = P'(\kappa)\,P(\kappa) - P(\kappa)\,P'(\kappa) \tag{4.6}$$

として導入する．明らかに P' と Q は $\kappa \in \mathrm{D}$ について正則である．(4.3), (4.5) および (4.6) から

$$P\,Q = -P\,P', \quad Q\,P = P'\,P\,. \tag{4.7}$$

したがって (4.4) から

$$P' = [Q, P] \tag{4.8}$$

を得る．

さて未知函数を $X = X(\kappa)$ とする微分方程式

$$X' = Q(\kappa)\,X \tag{4.9}$$

を考えよう．これは**線形**の微分方程式だから，初期値 $X(0)$ が特定化されたとき，$\kappa \in \mathrm{D}$ について正則な一意的な解を有する．これは，たとえば，線形常微分方程式系の場合と同様にして，逐次近似法により証明することができる[2]．

---

[2] 実際，(4.9) は行列で表現されたある常微分方程式系と同値である．しかし，とくに $\dim \mathsf{X} = \infty$ の場合は，行列を導入せずに，(4.9) を作用素微分方程式として扱う方が便利である（本項の結果はすべて，修正なしで無限次元空間にも妥当することに注意せよ）．たとえば第 0 番目の近似 $X_0(\kappa) = X(0)$ から始めて，$X_n(\kappa) = X(0) + \int_0^\kappa Q(\kappa)\,X_{n-1}(\kappa)d\kappa$ のように進む標準的な逐次近似法によれば，正則な作用素値函数の列 $X_n(\kappa)$ が得られる．ここで，D が単連結であることが本質的である．D の各コンパクト部分集合上で $X_n(\kappa)$ が $X(\kappa)$ に一様収束すること，また $X(\kappa)$ が，与えられた初期値 $X(0)$ の下での (4.9) の一意的かつ正則な解になっていることを示すのは容易である．ここでは演算 $X \to Q(\kappa)X$ が $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ で働く**線形**作用素であることが重要である．

$X(\kappa)=U(\kappa)$ を，初期条件 $X(0)=1$ の下での (4.9) の解としよう．このとき，(4.9) の一般解は

$$X(\kappa)=U(\kappa)\,X(0) \tag{4.10}$$

の形式で書き表わすことができる．実際，(4.10) は (4.9) および初期条件を満たす．解の一意性に鑑て，これが求める解にちがいない．

全く同様にして，微分方程式

$$Y'=-Y\,Q(\kappa) \tag{4.11}$$

は，初期条件 $Y(0)$ の下で一意的な解を有する．また初期条件 $Y(0)=1$ の下での解を $Y=V(\kappa)$ とする．こうすると $U(\kappa)$ と $V(\kappa)$ は互いに逆になっていることを示そう．これらの函数が満たす微分方程式から $(VU)'=V'U+VU'=-VQU+VQU=0$. ゆえに VU は定数で，しかも

$$V(\kappa)\,U(\kappa)=V(0)\,U(0)=1\,. \tag{4.12}$$

これから $V=U^{-1}$ であることがわかり，したがって

$$U(\kappa)\,V(\kappa)=1 \tag{4.13}$$

も得られる．

ところが考えている空間が無限次元の場合は，(4.13) を (4.12) から導くことができないので，後の参照のために，(4.13) に独立した証明を掲げておこう．まず上と同様に，

$$(U\,V)'=Q\,U\,V-U\,V\,Q=[Q,\,U\,V] \tag{4.14}$$

が成り立つのだが，今度は，(4.14) の右辺がゼロであるかどうかははっきりしないのである．しかし (4.14) も $Z=UV$ についての線形微分方程式で，その解の一意性を，(4.9) および (4.11) と同じ方法で証明することができる．$Z(\kappa)=1$ は (4.14) および初期条件 $Z(0)=1=U(0)\,V(0)$ を満たすから，UV は Z と一致しなければならない．これで (4.13) が証明されたのである[3].

---

[3] **指数の安定性** (stability of the index) に基づくより一般的な議論によっても，(4.13) を (4.12) から導くことができる．X-§5.5 を参照†.

さて $U(\kappa)$ が上に要請された条件 (1), (2) を満たすことを示そう．(4.12), (4.13) により $U(\kappa)^{-1}=V(\kappa)$ が成り立ち，(1) はこれから導かれる．また (2) を証明するためには，函数 $P(\kappa)U(\kappa)$ を考える．(4.9), (4.8) により

$$(PU)'=P'U+PU'=(P'+PQ)U=QPU \tag{4.15}$$

である．このように，$X=PU$ は初期値 $X(0)=P(0)$ に応ずる (4.9) の解であり，(4.10) により $U(\kappa)X(0)=U(\kappa)P(0)$ と合致しなければならないのである．これは (2) と同等である．

注意 4.1. (4.7) に鑑て，(4.15) の最後の項における Q は P' で置き換えることができる．こうして函数 $W(\kappa)=U(\kappa)P(0)=P(\kappa)U(\kappa)$ は，(4.9) よりも幾分単純な微分方程式

$$W'=P'(\kappa)W \tag{4.16}$$

を満たす．同様にして，$Z(\kappa)=P(0)U(\kappa)^{-1}$ が

$$Z'=ZP'(\kappa) \tag{4.17}$$

を満たすこともわかるであろう．

注意 4.2. $P(\kappa)$ の解析的延長が可能である限り，$U(\kappa)$ および $U(\kappa)^{-1}$ の解析的延長も可能である．しかし κ の定義域が単連結でない場合は，たとえ $P(\kappa)$ が一価であっても，$U(\kappa)$ や $U(\kappa)^{-1}$ は一価ではないという事態が生じうる．例として，$N=2$ とし，また

$$P(\kappa)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1/\kappa\\ \kappa & 1\end{pmatrix},\quad \kappa\in \mathrm{D}=\mathsf{C}\setminus\{0\}$$

とする．$P(\kappa)$ は射影，つまり $P(\kappa)^2=P(\kappa)$ を満たし，$\kappa\in\mathrm{D}$ について正則である．簡単な計算により，

$$Q(\kappa)=[P'(\kappa),P(\kappa)]=\begin{pmatrix}-1/2\kappa & 0\\ 0 & 1/2\kappa\end{pmatrix}$$

となる．微分方程式 (4.9) を初期条件 $U(1)=1$ の下で解くと，変換函数

$$U(\kappa)=\begin{pmatrix}\kappa^{-1/2} & 0\\ 0 & \kappa^{1/2}\end{pmatrix}$$

が導かれる.(ここで初期点として $\kappa=1$ を選んだのは，0 が D に含まれていないためである.) 明らかに $U(\kappa)$ は $\kappa\in\mathrm{D}$ について解析的だが，一価ではない．ところが，一価函数

$$U(\kappa)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \kappa\end{pmatrix},\quad ここで\ U(\kappa)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/\kappa\end{pmatrix}$$

を考えると，これは変換函数として等しく用を便ずることに注意しなければならない．これからわかるように，上記の段取りは変換函数の構成法として，いつでも便利なものとはいえないのである．第7項で述べるこれとは別の方法によると，一価の $U(\kappa)$ を見出すことができる.

ついでながら，ここで考察した $P(\kappa)$ は 作用素 $T(\kappa)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \kappa^2 & 0\end{pmatrix}$ のふたつの固有射影のひとつである．この作用素は例 1.1, d) の事例の κ を κ^2 にかえて得られたものである.(例 1.12, d) をも見よ.)

注意 4.3.　κ が実変数の場合でも，$U(\kappa)$ の構成は可能である．この場合，$P(\kappa)$ は必ずしも正則である必要はない．$P'(\kappa)$ が存在して，それが連続（あるいは区分的に連続）であれば十分なのである．すると $U(\kappa)$ は連続（あるいは区分的に連続）な導函数をもち，(1), (2) を満足するのである．ただし，それが κ について必ずしも正則でない点は別である.

注意 4.4.　与えられた $P(\kappa)$ に対して，変換函数 $U(\kappa)$ は一意的には定まらない．少なくとも十分に小さな $|\kappa|$ に対しては，I- §4.6 の結果から別の $U(\kappa)$ が得られる．I- §4.6 の P, Q に $P(0), P(\kappa)$ を代入すると，I-(4.38) から[4]，$|\kappa|$ が非常に小さく $\|P(\kappa)-P(0)\|<1$ の成り立つ場合には，

(4.18)
$$U(\kappa)=\left[1-\left(P(\kappa)-P(0)\right)^2\right]^{-1/2}\left[P(\kappa)\,P(0)+\left(1-P(\kappa)\right)\left(1-P(0)\right)\right]$$

が変換函数になることが知られる．(4.18) は $P(\kappa), P(0)$ についての代数的表現であるのに対して，上に構成された $U(\kappa)$ はある微分方程式の解として定義されたものであり，この意味において (4.18) は $U(\kappa)$ よりも単純である．しかし (4.18) には，それがすべての $\kappa\in\mathrm{D}$ については定義されていないか

[4] (4.18) は Sz.-Nagy [1] によって与えられたが，形式は全く異る.

もしれないという不便がある.

3. 微分方程式の解

われわれの主たる関心は, 変換函数 $U(\kappa)$ によって $\mathsf{M}(0)$ を $\mathsf{M}(\kappa)$ の上へ写すことにあるのであるから, $U(\kappa)$ のかわりに $W(\kappa)=U(\kappa)P(0)$ を考えれば十分である. W を決定するには, 微分方程式 (4.16) を初期条件 $W(0)=P(0)$ の下で解けば十分であろう.

そこで $P(\kappa)$ が $T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値に対する全射影である場合について, この方程式を解いてみよう. $P(\kappa)$ は (2.3) の形をもつのであるから,

$$P'(\kappa)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\kappa^n P^{(n+1)} \tag{4.19}$$

である. また $W(0)=P(0)=P$ であるから,

$$W(\kappa)=P+\sum_{n=1}^{\infty}\kappa^n W^{(n)} \tag{4.20}$$

と書くことができる. (4.19) と (4.20) を (4.16) に代入すると, $W^{(n)}$ に対する次のような漸化式が得られる.

$$\begin{aligned} n\,W^{(n)}=n\,P^{(n)}P+(n-1)\,P^{(n-1)}W^{(1)}& \\ +\cdots+P^{(1)}W^{(n-1)},&\qquad n=1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{4.21}$$

$P^{(n)}$ についての表現 (2.12) を利用することにより, $W^{(n)}$ は (4.21) から逐次的に決定される. このようにして, 次の関係が導かれる.

$$\begin{aligned} W^{(1)}&=P^{(1)}P,\\ W^{(2)}&=P^{(2)}P+\frac{1}{2}\left[P^{(1)}\right]^2P,\\ W^{(3)}&=P^{(3)}P+\frac{2}{3}P^{(2)}P^{(1)}P\\ &\qquad+\frac{1}{3}P^{(1)}P^{(2)}P+\frac{1}{6}\left[P^{(1)}\right]^3P. \end{aligned} \tag{4.22}$$

T の固有値 λ が半単純ならば，(2.14) により，

$$W^{(1)} = -ST^{(1)}P, \tag{4.23}$$
$$W^{(2)} = -ST^{(2)}P + ST^{(1)}ST^{(1)}P - S^2T^{(1)}PT^{(1)}P - \frac{1}{2}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P$$

を得る．

λ-群が単一の固有値から成る場合（分裂なし），$\mathsf{M}(\kappa) = P(\kappa)\mathsf{X}$ はそれ自体がこの固有値に対する $T(\kappa)$ の代数的固有空間となり，一般化された固有ベクトルの集合

$$\varphi_k(\kappa) = W(\kappa)\varphi_k, \quad k = 1, \ldots, m \tag{4.24}$$

が得られる．ここで $\{\varphi_k\}, k = 1, \cdots, m$ は $\mathsf{M}(0)$ の基底である．$W(\kappa)$ の性質により，m 個のベクトル (4.24) は $\mathsf{M}(\kappa)$ の基底を成す．

同様にして函数 $Z(\kappa) = P(0)U(\kappa)^{-1}$ が定義される．実は微分方程式 (4.17) を独立に解く必要はない．(4.17) が (4.16) と異るのは，未知函数と係数 $P'(\kappa)$ との積の順序にすぎない．こうして $Z(\kappa)$ についての級数 $\sum \kappa^n Z^{(n)}$ が，$W(\kappa)$ の級数から，その各項における因子の順序を逆にして得られるのである．このことは $P^{(n')}$ による $Z^{(n)}$ の表現についてのみならず，$P, S, T^{(1)}, T^{(2)}, \cdots$ による表現についてもあてはまり，それは (4.23) の場合と同様である．これは，$P^{(n)}$ についての表現 (2.12) が，上に述べた類の逆転の下で不変であるという事実による．この注意から，λ が半単純であるという同一の仮定の下に，次の関係が導かれる．

$$Z^{(1)} = -PT^{(1)}S, \tag{4.25}$$
$$Z^{(2)} = -PT^{(2)}S + PT^{(1)}ST^{(1)}S - PT^{(1)}PT^{(1)}S^2 - \frac{1}{2}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P.$$

注意 4.5. (4.18) によって与えられる他の変換函数 $U(\kappa)$ もまた，同一の仮定の下に，κ の巾級数として書き表わすことができる．容易にわかるように，$U(\kappa)P$ の展開は，上に導出した $W(\kappa)$ の展開と，κ^2 の項まで一致する．

4. 変換函数と簡約過程

上に構成したような，λ-群に対する全射影 $P(\kappa)$ についての変換函数 $U(\kappa)$ は，§2.3 に述べた簡約法にも適用することができる．λ-群を形づくる固有値は，不変部分空間 $\mathsf{M}(\kappa) = \mathsf{R}(P(\kappa))$ における $T(\kappa)$ の固有値であり，また $U(\kappa)$ は $P(\kappa) = U(\kappa)\, PU(\kappa)^{-1}$ という性質をもつのであるから，$\mathsf{M}(\kappa)$ における $T(\kappa)$ の固有値問題は，部分空間 $\mathsf{M} = \mathsf{M}(0) = \mathsf{R}(P)$ において考察される作用素

$$U(\kappa)^{-1}\, T(\kappa)\, U(\kappa) \tag{4.26}$$

の固有値問題と同値である（M はこの作用素について不変）．実際，(4.26) は $T(\kappa)$ と同一の固有値の集合をもち，それに対応する (4.26) の固有射影と固有巾零作用素は，$U(\kappa)^{-1}$ による相似変換によって $T(\kappa)$ の固有射影，固有巾零作用素と関係づけられている．関心の対象になっているのは λ-群だけであるから，作用素

$$P\, U(\kappa)^{-1}\, T(\kappa)\, U(\kappa)\, P = Z(\kappa)\, T(\kappa)\, W(\kappa) \tag{4.27}$$

を考えれば十分である．Z, W は先の諸項で導入されたものである．

(4.27) は κ について正則であり，この意味で所与の作用素 $T(\kappa)$ と同一の形式を有するものである．こうして λ-群の問題は，X の固定された部分空間 M における問題に帰着されるのである．§2.3 において考察された簡約過程では，部分空間 $\mathsf{M}(\kappa)$ が κ に依存したのに対して，当初の問題をより小さな部分空間 M における問題に帰着させるこの方法は，M が κ によらないという利点をもっている．この理由により，$U(\kappa)$ の構成は単純ではないという実際上の不便を伴うものの，(4.27) への簡約法は，すくなくとも理論的には完成度の高いものといえよう．

とくに，λ-群を形づくる固有値の加重平均 $\widehat{\lambda}(\kappa)$ は，m^{-1} に (4.27) のトレースを乗じた値に等しいことが導かれる．つまり

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}(\kappa) &= m^{-1}\ \mathrm{tr}\ Z(\kappa)\, T(\kappa)\, W(\kappa)\\ &= \lambda + m^{-1}\ \mathrm{tr}\ Z(\kappa)\ \big(T(\kappa) - \lambda\big)\, W(\kappa)\end{aligned} \tag{4.28}$$

である．$W(\kappa)$, $Z(\kappa)$ の係数に (4.23), (4.25) を代入すると，(2.33) と同一

の結果に到達する．

問題 4.5a.　最後に述べた命題を確かめよ．

5. 複数の射影に対する連立変換

第二項において考察された $U(\kappa)$ は，単一の射影 $P(\kappa)$ についてのみ用をなすにすぎない．そこで

$$P_h(\kappa)\,P_k(\kappa) = \delta_{hk}\,P_h(\kappa) \tag{4.29}$$

なる条件を満たす複数の射影 $P_h(\kappa), h = 1, \cdots, s$ を考え，

$$U(\kappa)\,P_h(0)\,U(\kappa)^{-1} = P_h(\kappa), \quad h = 1, \ldots, s \tag{4.30}$$

を満たす変換函数 $U(\kappa)$ を構成することにしよう．その帰結として

$$\varphi_{hj}(\kappa) = U(\kappa)\,\varphi_{hj} \tag{4.31}$$

とおくことにより，各部分空間 $\mathsf{M}_h(\kappa) = \mathsf{R}(P_h(\kappa))$ の基底 $\{\varphi_{h1}(\kappa),\cdots, \varphi_{hm_h}(\kappa)\}$ を見出すことができる．ここで $\{\varphi_{h1},\cdots,\varphi_{hm_h}\}$ は $\mathsf{M}_h = \mathsf{M}_h(0)$ の基底である．

以前と同様，$P_h(\kappa)$ は複素平面の単連結領域 D において正則であるか，または実軸のある区間において連続微分可能であることを仮定する．しかも集合 $\{P_h(\kappa)\}$ は

$$\sum_{h=1}^{s} P_h(\kappa) = 1 \tag{4.32}$$

であるという意味において **完備** (complete) であることを想定してもよいであろう．そうでない場合には，射影 $P_0(\kappa) = 1 - \sum_{h=1}^{s} P_h(\kappa)$ を導入することができる．すると，新しい集合 $\{P_h(\kappa)\}, h = 0, 1, \cdots, s$ は (4.29) ならびに完備性の条件を満たす．さらに $U(\kappa)$ が当初の集合に対して (4.30) を満たすことと，新しい集合に対してそうなることとが同値なのである．

$U(\kappa)$ の構成は，単一の $P(\kappa)$ に対するそれと類似している．つまり $U(\kappa)$ は，初期条件 $X(0) = 1$ の下における微分方程式 (4.9) の解として定義され

るのである．この場合，$Q(\kappa)$ は

$$(4.33)\qquad Q(\kappa) = \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{s}\left[P'_h(\kappa), P_h(\kappa)\right] = \sum_{h=1}^{s} P'_h(\kappa)\,P_h(\kappa)$$
$$= -\sum_{h=1}^{s} P_h(\kappa)\,P'_h(\kappa)$$

によって与えられる．(4.32) によれば $\sum P'_h\,P_h + \sum P_h\,P'_h = \sum(P_h^2)' = \sum P'_h = 0$ であることに留意すれば，(4.33) の三つの項の均等は (4.32) から導かれるのである．$P(\kappa)$ が単一の場合は，$Q(\kappa)$ が (4.6) に合致することにも注意しよう．(4.33) には 1/2 という因子が存在し，ここに相違があるように見えるが，この差は，(4.33) において単一の $P(\kappa)$ を $\{P(\kappa), 1-P(\kappa)\}$ なる組に拡張し，完備性の条件 (4.32) が満たされるようにしたことから生じているのである．

第 2 項の議論［とくに (4.15)］を見ると，

$$(4.34)\qquad P'_h(\kappa) = \left[Q(\kappa), P_h(\kappa)\right], \quad h = 1, \ldots, s$$

を示すことができれば，(4.30) が証明されることがわかるであろう．これを示すために，(4.29) を微分して

$$(4.35)\qquad P'_h\,P_k + P_h\,P'_k = \delta_{hk}\,P'_h$$

を得る．左から P_h を乗ずると，$P_h\,P'_h\,P_k + P_h\,P'_k = \delta_{hk}\,P_h\,P'_h = P_k\,P_h\,P'_h$ となり，これは

$$(4.36)\qquad -\left[P_h\,P'_h, P_k\right] = P_h\,P'_k$$

と書くことができる．これを $h = 1, \cdots, s$ について加え合わせると，(4.33) により (4.34) が導かれるのである．

$P_h(\kappa)$ がそこで正則であるような，κ-平面の任意の単連結領域において，$T(\kappa)$ のすべての固有射影 $P_h(\kappa)$ の集合についても，この方法で連立変換函数 $U(\kappa)$ を構成しうることは明白であろう[5]．

[5] 変換函数 $U(\kappa)$ は量子力学の断熱定理において重要な応用を有する．これについては T. Kato [2], Garrido [1], Garrido and Sancho [1] を参照のこと．

6.　正則行列函数の対角化

$(\tau_{jk}(\kappa))$ を，その要素が複素変数 κ の正則函数である $N \times N$ 型行列とする．ある条件の下において，このような行列函数は対角化が可能である．すなわちその要素が κ の正則な函数で，しかも考慮されているすべての κ について

$$(4.37)\qquad \big(\tau'_{jk}(\kappa)\big) = \big(\gamma_{jk}(\kappa)\big)^{-1}\big(\tau_{jk}(\kappa)\big)\big(\gamma_{jk}(\kappa)\big)$$

が対角行列となるような行列 $(\gamma_{jk}(\kappa))$ が存在するのである．

この問題は本節で考察した問題に帰着させることができる．つまり所与の行列を数ベクトルの空間 $\mathsf{X} = \mathsf{C}^N$ で働く作用素 $T(\kappa)$ とみなし，上記の結果を適用すればよいのである．κ の値が例外点を含まぬ単連結領域 D に限定されている場合は，$U(\kappa)$ を構成することができ，したがって $\kappa \in \mathrm{D}$ について正則なベクトル函数から成り，しかも $T(\kappa)$ の固有射影の集合 $\{P_h(\kappa)\}$ に適応する基底 (4.31) を構成することができる．そのような基底について，$T(\kappa)$ の行列表現は I-§5.4 に述べた簡単な形式を有する．とくに $D_h(\kappa)$ がすべて恒等的にゼロならば［それはたとえば，すべての $m_h = 1$ であるか，あるいは実数 κ について $T(\kappa)$ が正規である場合に起こる事態である］，$T(\kappa)$ の行列表現は $\lambda_h(\kappa)$ を対角要素とする対角行列となる．I-§5.4 から知られるとおり，これは所望の性質 (4.37) を具えた行列函数 $(\gamma_{jk}(\kappa))$ の存在と同値である．列ベクトル $(\gamma_{1k}(\kappa), \cdots, \gamma_{Nk}(\kappa))$ は，所与の行列函数 $(\tau_{jk}(\kappa))$ の固有ベクトルであることに注意しよう．

7.　幾何的固有空間（固有射影）

これまでのところ，われわれは主として正則な族 $T(\kappa)$ の代数的固有射影について考察してきた．単純な部分領域 D においては，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ およびそれに対応する（代数的）固有射影 $P_h(\kappa)$ は κ について正則であることを想起しよう（§1.8 を見よ）．さてここで，$Q_h(\kappa)\mathsf{X}$ が $\lambda_h(\kappa)$ に対する幾何的固有空間となるような幾何的固有射影 $Q_h(\kappa)$ について考えよう．

定理 4.6.　各 $\lambda_h(\kappa)$ は $\kappa \in \mathrm{D}$ について正則な幾何的固有射影 $Q_h(\kappa) \leqq$

$P_h(\kappa)$[6]を有する．ただし，D の孤立的部分集合に属する κ のある例外的な値については，真の幾何的固有空間は $Q_h(\kappa)\mathsf{X}$ よりも大きい可能性があることを承知しておこう．

例 4.7. $T(\kappa)=\begin{pmatrix}0 & \kappa\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ とする（例 1.1, 1.12, c) を見よ）．固有値 $\lambda(\kappa)=0$ に対する幾何的固有射影は，a を任意の複素数とするとき，$Q(\kappa)=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ によって与えられる．他方，$P(\kappa)=1$ は代数的固有射影である．定理 4.6 において言及された例外点は $\kappa=0$ であり，この点における真の幾何的固有空間は全空間 X である．これは $Q(0)\mathsf{X}$ よりも大きい．a は任意であるから，$Q(\kappa)$ は一意的ではない．

定理 4.6 は作用素 $T(\kappa)\in\mathcal{B}(\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2)$ の正則な族に関する一般的定理（次項において証明する）の応用として示される．その際，土台となる κ の領域は単連結である必要はない．

定理 4.8. （階数の安定性）D を（必ずしも単連結ではない）C の領域とし，$T(\kappa)\in\mathcal{B}(\mathsf{X}_1,\mathsf{X}_2)$ は $\kappa\in\mathrm{D}$ に対して定義された正則な族とする．このとき，$\kappa\notin\mathrm{K}$ に対しては $\operatorname{rank}T(\kappa)=r$，また $\kappa\in\mathrm{K}$ に対しては $\operatorname{rank}T(\kappa)<r$ を満たす整数 $r\geqq 0$（$T(\kappa)$ の最大階数）と D の孤立的部分集合 K とが存在する．またすべての $\kappa\in\mathrm{D}$ に対して $T(\kappa)=T(\kappa)\,Q_1(\kappa)=Q_2(\kappa)\,T(\kappa)$ を満たす，$\kappa\in\mathrm{D}$ について正則な r 次元射影 $Q_j(\kappa)\in\mathcal{B}(\mathsf{X}_j)(j=1,2)$ が存在する．$\kappa\notin\mathrm{K}$ とすれば，$T(\kappa)\mathsf{X}_1=Q_2(\kappa)\,\mathsf{X}_2$, $\mathsf{N}(T(\kappa))=(1-Q_1(\kappa))\mathsf{X}_1$ であり，$T(\kappa)$ は $Q_1(\kappa)\mathsf{X}_1$ を $Q_2(\kappa)\,\mathsf{X}_2$ の上に一対一に写す．

定理 4.9. 定理 4.8 においてさらに，$T(\kappa)=T(\kappa)\,P_1(\kappa)=P_2(\kappa)\,T(\kappa)$ を満たす射影 $P_j(\kappa)\in\mathcal{B}(\mathsf{X}_j)(j=1,2)$ の正則な族が存在することを仮定する．このとき Q_j は，$j=1,2$ および $\kappa\in\mathrm{D}$ に対して $Q_j(\kappa)\leqq P_j(\kappa)$ となるように選ぶことができる．

---

[6] ふたつの射影 P, Q について，$Q\leqq P$ は $Q=PQ=QP$ を表わしていることを想起せよ（I-§3.4 を見よ）．$Q\leqq P$ は $Q\mathsf{X}\subset P\mathsf{X}$ かつ $Q^*\mathsf{X}^*\subset P^*\mathsf{X}^*$ であることと同値であることに注意．

定理 4.6 の証明.　$T_h(\kappa) = (T(\kappa) - \lambda_h(\kappa))\,P_h(\kappa)$ とする．$T_h(\kappa)$ は事実上，$T(\kappa) - \lambda_h(\kappa)$ の（I-§5.1 に説明した意味での）簡約部分空間 $P_h(\kappa)\mathsf{X}$ における部分である．§1.8 の結果によれば，$T_h(\kappa)$ は $\kappa \in \mathrm{D}$ について正則で，$T_h(\kappa) = T_h(\kappa)\,P_h(\kappa) = P_h(\kappa)\,T_h(\kappa)$ を満たす．定理 4.8 および定理 4.9 により，$\kappa \notin \mathrm{K}$ に対しては $\mathrm{rank}\ T_h(\kappa) = r$ は一定であること（ここで K は孤立的集合），そしてさらに，$\kappa \notin \mathrm{K}$ については $T_h(\kappa)$ が $Q_{h1}(\kappa)\mathsf{X}$ を $Q_{h2}(\kappa)\mathsf{X}$ の上へ一対一に写すような射影 $Q_{hj}(\kappa) \leqq P_h(\kappa)$ $(j = 1, 2)$ の存在することが導かれる．$T(\kappa) - \lambda_h(\kappa)$ が $(1 - P_h(\kappa))\mathsf{X}$ をそれ自身の上に一対一に写すことを想起すれば，$\kappa \in \mathrm{K}$ なる点 κ を除いて，$T(\kappa) - \lambda_h(\kappa)$ の零空間はちょうど $(1 - Q_{h1}(\kappa))\,P_h(\kappa)\mathsf{X}$ に等しいことがわかる．$\kappa \in \mathrm{K}$ に対しては，$T(\kappa) - \lambda_h(\kappa)$ の零空間は $(1 - Q_{h1}(\kappa))\,P_h(\kappa)\mathsf{X}$ よりも大きい．かくして $(1 - Q_{h1}(\kappa))\,P_h(\kappa)$ は定理 4.6 において要請される $\lambda_h(\kappa)$ に対する幾何的固有射影となる．

注意 4.10.　定理 4.8, 4.9 は，$Q_j(\kappa)$ が D のすべての点において正則であるという意味で **大域的**である．$Q_j(\kappa)$ に対応する変換函数 $U_j(\kappa)$ を導入し，$Q_j(0) = U_j(\kappa)^{-1}\,Q_j(\kappa)U_j(\kappa)$ （一般性を失うことなく，$0 \in \mathrm{D}$ と仮定する）とすれば，この大域的な性格はより明瞭となる．$T_0(\kappa) = U_2(\kappa)^{-1}T(\kappa)\,U_1(\kappa)$ とおけば，

$$T_0(\kappa) = T_0(\kappa)\,Q_1(0) = Q_2(0)\,T_0(\kappa) \tag{4.38}$$

となる．これから $T(\kappa)$ が族 $T_0(\kappa) \in \mathscr{B}(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2)$ に“相似”であることが示され，$\kappa \in \mathrm{K}$ を除けば，$T_0(\kappa)$ は固定的な像 $Q_2(0)\,\mathsf{X}_2$ および固定的な零空間 $(1 - Q_1(0))\mathsf{X}_1$ を有する[7]．

ここに与えられた $T_0(\kappa)$ の構成には変換函数 $U_j(\kappa)$ が必要とされる．第2項に与えられた変換函数は，D が単連結の場合にのみ利用できるものである．そのような制限をつけずに $U_j(\kappa)$ を構成するいまひとつの方法について，第9項で論じようと思う．

---

[7] 類似の結果が，κ を実軸に限定した場合について，Silverman and Bucy [1] によって与えられた．κ が実の場合（または実軸に近接している場合），自己随伴的な族 $T(\bar{\kappa})^*T(\kappa)$ および $T(\kappa)\,T(\bar{\kappa})^*$ を考えることにより，これらの結果がより簡単に証明されることに注意しておいてよかろう．(ここで一般性を失うことなく，X はユニタリ空間と仮定する.) 後段，§5.7 を見よ．

注意 4.11. （相対逆作用素）定理 4.8 において，すべての $\kappa \in \mathrm{D}$ に対して $\operatorname{rank} T(\kappa) =$ 定数 $= r$ が成り立ち，したがって K が空であることを仮定しよう．$T(\kappa)$ は $Q_1(\kappa)\mathsf{X}_1$ を $Q_2(\kappa)\mathsf{X}_2$ の上へ一対一に写すのであるから，$Q_2(\kappa)\mathsf{X}_2$ から $Q_1(\kappa)\mathsf{X}_1$ への逆作用素 $S(\kappa)$ が定義される．この作用素 $S(\kappa)$ は，これらの部分空間の κ に正則に依存する基底に関して，正則な要素をもつ行列によって表現されるという意味で，κ について正則である（なぜなら $T(\kappa)$ も同じ性質を有するからである）．そのような基底の存在については，以下に述べる定理 4.8 の証明中に示される（(4.42) を見よ）．$S(\kappa)y = S(\kappa)Q_2(\kappa)y$ とおくことにより，$S(\kappa)$ を X_2 全体に拡大すると，$S(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$ は $\kappa \in \mathrm{D}$ について正則で，しかも $ST = Q_1, TS = Q_2$, $TST = T$，かつ $STS = S$ であることが容易に了解される．$S(\kappa)$ を $T(\kappa)$ の相対逆作用素[8]と称する．

8. 定理 4.8，4.9 の証明

定理 4.8, 4.9 を証明するために，複素函数論の若干の初歩的な結果が必要となる．

補題 4.12[9]. α_1, α_2 は領域 $\mathrm{D} \subset \mathbf{C}$ において正則なふたつのスカラー値の函数で，零点を共有しないものとする．このとき恒等的に $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 1$ を満たす，D におけるふたつの正則函数 β_1, β_2 が存在する．

証明. Z_j を α_j の零点の集合とする $(j = 1, 2)$．仮定により，Z_1 と Z_2 とは共通部分をもたない．$1/\alpha_1\alpha_2$ は D において有理型で，$\mathrm{Z}_1 \cup \mathrm{Z}_2$ の中に極を有する．ミッタグ-レフラーの定理[10]により，極を Z_1 の中にのみもち，また極のおのおのにおいて $1/\alpha_1\alpha_2$ と同一の主部をもつ有理型函数 γ_1 が存在する．すると，$\gamma_2 = 1/\alpha_1\alpha_2 - \gamma_1$ は Z_2 の中にのみ極をもち，また極のおのおのにおいて $1/\alpha_1\alpha_2$ と同一の主部を有する．こうして $\beta_1 = \alpha_2\gamma_2, \beta_2 = \alpha_1\gamma_1$

---

8 相対逆作用素については，たとえば Bart [1]，Gramsch [2] を見よ．

9 Helmer [1], Burckel【1】を参照.

10 Knopp【2】, p. 37 を見よ．ここでは件の定理が $\mathrm{D} = \mathbf{C}$ の特別な場合について述べられている．それは任意の領域 D に対して成り立つことが知られている（たとえば Burckel【1】を見よ）.

とすれば，$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=1$ である．γ_2 の極は α_2 の零点によって打ち消されるから，β_1 は正則である．β_2 についても同様である．

補題 4.13.　$u(\kappa)\in \mathsf{X}$ は $\kappa\in \mathrm{D}$ について正則で，零点をもたぬものとする．このとき $\kappa\in \mathrm{D}$ について恒等的に $(u(\kappa),f(\overline{\kappa}))=1$ を満たす，$\overline{\kappa}\in\overline{\mathrm{D}}$（実軸に関する D の鏡映）について正則な函数 $f(\overline{\kappa})\in \mathsf{X}^*$ が存在する．

証明.　$\kappa_0\in \mathrm{D}$ を固定する．$u(\kappa_0)\neq 0$ であるから，$(u(\kappa_0),\varphi)\neq 0$ となる $\varphi\in \mathsf{X}^*$ が存在する．$(u(\kappa),\varphi)$ は κ について正則であるから，その零点は孤立的集合 $\mathrm{Z}\subset \mathrm{D}$ を形づくる．各 $\kappa\in \mathrm{D}$ について $u(\kappa)\neq 0$ であるから，すべての $\kappa\in \mathrm{Z}$ に対して $(u(\kappa),\psi)\neq 0$ となるような $\psi\in \mathsf{X}^*$ が存在する．実際，X^* は $\kappa\in \mathrm{Z}$ については，超平面 $\{u(\kappa)\}^{\perp}$ の可算合併にはなりえない[11]．こうして，ふたつのスカラー値正則函数 $(u(\kappa),\varphi)$, $(u(\kappa),\psi)$ は共通の零点をもたないのである．補題 4.12 から，$\alpha(\kappa)(u(\kappa),\varphi)+\beta(\kappa)(u(\kappa),\psi)=1$ となるような，D において正則なスカラー値函数 α, β が存在する．そこで $f(\overline{\kappa})=\overline{\alpha(\kappa)}\varphi+\overline{\beta(\kappa)}\varphi$ とおけば，補題 4.13 が示されるのである．

補題 4.14.　$v(\kappa)$ を D における X-値の有理型函数とする．v が恒等的にはゼロでないとすれば，$u=\alpha v$ が D において正則で零点をもたないような，スカラー値の有理型函数 α が存在する（v から u を構成するプロセスを，今後，**正則化**，regularization と呼ぶことにする）．

証明.　v が位数 k の極［零点］を有するときには，必ず α が位数 k の零点［極］をもつようにできることを示せば十分である．そしてそのような α は，ワイエルシュトラスの定理[12]によって存在する．

定理 4.8 の証明.　証明は通常のシュミットの直交化の方法（I-§6.3）の一般化によって得られる．一般性を失うことなく，$0\in \mathrm{D}$ で，しかもすべての $\kappa\in \mathrm{D}$ に対して $\operatorname{rank} T(0)=r\geqq \operatorname{rank} T(\kappa)$ であることを仮定してよいであろう．$\varphi_1,\cdots,\varphi_r\in \mathsf{X}_1$ を $T(0)\varphi_j\in \mathsf{X}_2$, $j=1,\cdots,r$ が一次独立であるよ

---

[11] X が一般のバナッハ空間の場合は，ここでベールのカテゴリー定理が必要となるであろう（定理 III-1.14 を見よ）†．$\dim \mathsf{X}<\infty$ のときは，ルベーグ測度に基づく論法を用いることができる．

[12] Knopp【2】, p. 6 を見よ．そこでは $\mathrm{D}=\mathbf{C}$ が仮定されているが，再びこの定理は任意の領域 D についても成立する（たとえば Burckel【1】を見よ）．

うにとる．

$v_1(\kappa)=T(\kappa)\varphi_1$ とおく．$v_1(\kappa)\in \mathsf{X}_2$ は $\kappa\in \mathrm{D}$ について正則で，恒等的にはゼロでないから，それを正則化して零点をもたない正則函数 $u_1(\kappa)$ を得ることができる（補題 4.14）．補題 4.13 により，

$$(4.39)\qquad \kappa\in \mathrm{D}\text{ に対して }\big(u_1(\kappa),e_1(\overline{\kappa})\big)=1$$

を満たす，$\overline{\mathrm{D}}$ において正則な X_2^*-値の函数 e_1 が存在する．

$v_2(\kappa)=T(\kappa)\varphi_2$ とおき，また

$$(4.40)\qquad w_2(\kappa)=v_2(\kappa)-\big(v_2(\kappa),e_1(\overline{\kappa})\big)\ u_1(\kappa)\,,\quad \kappa\in \mathrm{D}$$

とおく．w_2 は D において正則で，(4.39) により，$(w_2(\kappa),e_1(\overline{\kappa}))=0$ を満たす．$T(0)\varphi_j$ の一次独立性から $w_2(0)\neq 0$ であり，したがって w_2 は恒等的にはゼロではない．かくしてそれを正則化して，零点をもたない正則函数 u_2 を得ることができる（補題 4.14）．補題 4.13 により，$(u_2(\kappa),f_2(\overline{\kappa}))=1$ を満たす，$\overline{\mathrm{D}}$ における正則函数 $f_2(\overline{\kappa})\in \mathsf{X}_2^*$ が存在する．すると

$$(4.41)\qquad e_2(\overline{\kappa})=f_2(\overline{\kappa})-\overline{\big(u_1(\kappa),f_2(\overline{\kappa})\big)}\,e_1(\overline{\kappa})$$

は $\overline{\kappa}\in\overline{\mathrm{D}}$ について正則となる．こうして $r=2$ に対して

$$(4.42)\qquad \big(u_j(\kappa),e_k(\overline{\kappa})\big)=\delta_{jk}\,,\quad j,k=1,\ldots,r\,,\quad \kappa\in \mathrm{D}$$

を満たす u_j, e_k が構成されたのである．

このプロセスを継続して，それぞれ D および $\overline{\mathrm{D}}$ 上で定義され，$j,k=1,\cdots,r$ について (4.42) が満たされるような正則な函数 $u_j(\kappa)\in \mathsf{X}_2$ および $e_j(\overline{\kappa})\in \mathsf{X}_2^*$ を，$j=1,2,\cdots,r$ について構成することができる．

とくにすべての $\kappa\in \mathrm{D}$ について $u_j(\kappa)$ は一次独立である．その線形包 $\mathsf{M}(\kappa)$ は，$w_j(\kappa)$ のひとつが零点を有するような κ の孤立値を除き，$v_j(\kappa)=T(\kappa)\varphi_j$ の線形包と合致する．それゆえ，孤立的集合 $\mathrm{K}\subset \mathrm{D}$ に属する κ を除いて，$\operatorname{rank} T(\kappa)=r$ が成り立つ．

次に

$$(4.43)\qquad Q_2(\kappa)=\sum_{j=1}^{r}\big(\quad,e_j(\overline{\kappa})\big)\ u_j(\kappa)\in \mathcal{B}(\mathsf{X}_2),\quad \kappa\in \mathrm{D}$$

とおくことによって[13]，$Q_2(\kappa)\mathsf{X}_2 = \mathsf{M}(\kappa)$ となるような大域的基底 $u_j(\kappa)$ をもつ，射影の正則な族が得られる．

$\kappa \in \overline{\mathrm{D}}$ について定義される正則な族 $T(\overline{\kappa})^*$ に対しても同じ構成法を適用すれば，D 上の大域的基底をもつ，X_1 における射影の正則な族 $Q_1(\kappa)$ で，しかも $\kappa \notin \mathrm{K}$ に対しては $\mathsf{N}(T(\kappa)) = (1 - Q_1(\kappa))\mathsf{X}_1$ を満たすものを得るのである（I-(3.37) を見よ）．これで定理 4.8 の証明が完結する．

定理 4.9 の証明． 定理 4.8 の証明で用いた記号法に従う．仮定により，$u_j(\kappa) = P_2(\kappa)\,u_j(\kappa)$ が成り立つ．なぜなら，同じ関係が $v_j(\kappa) = T(\kappa)\varphi_j$ についても成り立ち，また $u_j(\kappa)$ と $v_j(\kappa)$ とは同一の線形包を有するからである．したがって，$e_k(\kappa)$ を $P_2(\kappa)^* e_k(\kappa)$ で置き換えても，双直交関係 (4.42) に変化はない．この修正を施せば，$Q_2(\kappa) \leqq P_2(\kappa)$ を得る．同様にして，P_1 および Q_1 についての主張も証明することができる．

9．射影族および変換函数についての注意

領域 D 上に射影の正則な族 $P(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ が与えられたとき，ふたつの問題が生ずるであろう．第一に，各 $\kappa \in \mathrm{D}$ に対して $P(\kappa)\mathsf{X}$ の基底を形づくる正則なベクトル函数 $u_j(\kappa) \in \mathsf{X}$, $j = 1, 2, \cdots, r = \dim P(\kappa)$ は存在するであろうか（大域的基底）．

もしこれが存在すれば，$P(\kappa)$ は次の形式に表現できることが容易にわかる．

(4.44)
$$P(\kappa) = \sum_{j=1}^{r} \big(\quad, e_j(\overline{\kappa})\big)\, u_j(\kappa)\,,$$

ただしここで

(4.45)
$$\big(u_j(\kappa), e_k(\overline{\kappa})\big) = \delta_{jk}\,, \quad e_k(\overline{\kappa}) \in P(\kappa)^*\,\mathsf{X}^*$$

である．また $e_k(\overline{\kappa}) \in \mathsf{X}^*$ は $\overline{\kappa} \in \overline{\mathrm{D}}$ について正則で，$P(\kappa)^*\mathsf{X}^*$ の基底を形づくることも見易いところであろう．実際，(4.45) により，$e_k(\overline{\kappa})$ は一意的に定まり，$\overline{\kappa}$ について正則であることはすぐにわかる．逆に，(4.44) の形の表現から，$P(\kappa)\mathsf{X}$ が大域的基底 $\{u_j(\kappa)\}$ をもつことが保証される．定理 4.8, 4.9 における $Q_j(\kappa)$ は，この場合に該当することに注意しよう．

---

[13] $(\quad, f)x$ は，u を $(u, f)x$ に写す，階数 1 の線形作用素である．

第二の問題は，簡単化のために $0 \in \mathrm{D}$ と仮定するとき，

$$P(\kappa) = U(\kappa)\,P(0)\,U(\kappa)^{-1} \tag{4.46}$$

を満たす正則な変換函数 $U(\kappa)$ が存在するや否や，これである．明らかに，第二の問に肯定的に答えられるならば，第一の問についても同様である（第4項を見よ）．

第4項で示したとおり，D が単連結の場合は，これらふたつの問に肯定的に答えることができる．D が単連結でない場合でも，第一の問はやはり肯定的に解決することができる．これは定理 4.8, 4.9 の証明から容易に導かれるであろう．実際，定理 4.9 を $T(\kappa) = P(\kappa) = P_1(\kappa) = P_2(\kappa)$ に適用すると，$Q_1(\kappa) = Q_2(\kappa) = P(\kappa)$ という結果が得られる．他方，$Q_2(\kappa)$ は (4.44) の形式をもつことが示された．付随的に，これらの結果は，$\dim P(\kappa) = r < \infty$ である限り，X がバナッハ空間である場合においてもなお成立することに留意しておこう．

$\dim \mathsf{X} = N < \infty$ の場合には，第二の問への答えも，任意の領域 D に対して肯定的である．これを示すためには，上記の定理の証明で用いた一般化されたシュミットの方法を継続しさえすればよいのである．ただし集合 $v_j(\kappa)$ $(j = 1, 2, \cdots, r)$ に，N 個のベクトル $v_j(0)$ が一次独立となるような $N - r$ 個の函数 $v_j(\kappa) = \varphi_j (j = r+1, \cdots, N)$ を補って考えるのである．$u_j(0)$ を $u_j(\kappa), j = 1, \cdots, N$ へ写す写像 $U(\kappa)$ が所望の変換函数である．

最後に，より基本的な問題を考えて見よう．$\kappa \in \mathrm{D}$ に対して，X の **部分空間の（局所的に）正則な族** $\mathsf{M}(\kappa)$ が与えられたとき，$P(\kappa)\mathsf{X} = \mathsf{M}(\kappa)$ を満たす射影の正則な族 $P(\kappa)$ が存在するであろうか，という問がこれである．ここで $\mathsf{M}(\kappa)$ が κ について **正則**であるとは，各 $\mu \in \mathrm{D}$ に対して μ の近傍 D_μ と D_μ 上の正則な函数 $w_j(\kappa) \in \mathsf{X}$ を適当に選び，それを $\kappa \in \mathrm{D}_\mu$ に対する $\mathsf{M}(\kappa)$ の基底となしうることをいう．

$\dim \mathsf{M}(\kappa) = r < \infty$ である限り，バナッハ空間の場合でもなお，答えは再び肯定的である[14]．ここで簡単な証明にスケッチを与えておくが，それは定理 4.8 の証明に少々の修正を施したものである．$\{w_j(\kappa)\}$ を $\kappa = 0$ の近くにおける $\mathsf{M}(\kappa)$ の局所的基底とし，$\det((w_j(0), \psi_k)) \neq 0$ を満たす r 個のベクトル $\psi_j \in \mathsf{X}^*$ $(j = 1, \cdots, r)$ を固定する．そこで $w_j(\kappa)$ の一次結合を用いて，

$$\big(v_j(\kappa), \psi_k\big) = \delta_{jk} \tag{4.47}$$

となるような，$\mathsf{M}(\kappa)$ の新しい基底 $\{v_j(\kappa)\}$ を構成することができる．これによって $v_j(\kappa)$ は一意的に定まり，$\kappa = 0$ の与えられた近傍において，κ の有理型函数となる．

これらの函数 $v_j(\kappa)$ は (4.47) によって一意的に定まるのであるから，すべての $\kappa \in \mathrm{D}$ に有理的に延長することができる．かくして $v_j(\kappa)$ は $\mathsf{M}(\kappa)$ の**有理型大域**

[14] $\mathsf{M}(\kappa)$ に対する大域的基底の存在は Saphar [1] によって証明された．

的基底 (meromorphic global basis) を形づくる．さてそこで，定理 4.8 の証明に用いた一般化されたシュミットの方法を $v_j(\kappa)$ に適用すれば，所望の正則な大域的基底 $u_j(\kappa)$ が得られるのである．補題 4.14 によって与えられた正則化の方法は有理型函数 $v(\kappa)$ にも適用可能であることに注意しよう．

§ 5.　非解析的摂動

1.　固有値および全射影の連続性

これまでの諸節においては，κ について正則な作用素 $T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathrm{X})$ の固有値問題を考察し，その固有値や固有射影が κ の解析函数であることを示した．さてそこで，$T(\kappa)$ の κ への依存関係としてより一般的なタイプを考えた場合に，いかなる結論が導かれるかをたずねてみよう[1]．

まずはじめに，$T(\kappa)$ が κ について連続であることだけを仮定する場合を考えてみる．κ は複素平面の領域 D_0 あるいは実軸のある区間 I を変化するものとしてよいであろう．この一般的な仮定の下においてもなお，これまでの諸節の結果のいくつかは本質的に変更なしで成り立つ．

さて，レゾルベント $R(\zeta,\kappa) = (T(\kappa) - \zeta)^{-1}$ は，ζ が $T(\kappa)$ のどの固有値とも異なるような領域のおのおのにおいて，ζ および κ の二変数について連続である．これは §1.3 の議論をすこし修正することによって，容易に証明することができる．ひとつだけ注意しなければならない点は，(1.11) の $A(\kappa) = T(\kappa) - T$ はもはや正則ではないが，$\kappa \to 0$ のときゼロに収束すること，これである $(T = T(0))$．

これから，$|\kappa|$ が十分に小さく

$$\|T(\kappa) - T\| < \|R(\zeta)\|^{-1} \quad (R(\zeta) = R(\zeta,0)) \tag{5.1}$$

が成り立つという条件の下で，ζ が T のレゾルベント集合 $\mathrm{P}(T)$ に属するとき，$R(\zeta,\kappa)$ が存在することがわかるのである．(1.12) を見よ．さらに $\kappa \to 0$ のとき，$\mathrm{P}(T)$ のコンパクト部分集合に属する ζ に対して一様に $R(\zeta,\kappa) \to R(\zeta)$ が成り立つ．

---

[1] この問題は対称作用素の場合については Rellich [1], [2], [8] によって（[8] では一層詳細にわたって）論じられた．

いま λ を T の固有値のひとつで，たとえば（代数的）重複度を m としよう．Γ は λ を囲む閉曲線で，T のその他の固有値は含まないものとする．$\|R(\zeta)\|^{-1}$ は $\zeta \in \Gamma$ に対して正の最小値 δ をもち，また $\|T(\kappa) - T\| < \delta$ ならば，すべての $\zeta \in \Gamma$ に対して $R(\zeta, \kappa)$ が存在する．したがって作用素 $P(\kappa)$ が (1.16) によって再び定義され，$\kappa = 0$ の近傍においては κ について連続である．解析的な場合と同様，$P(\kappa)$ は Γ の内側に位置する $T(\kappa)$ の固有値に対する全射影である．$P(\kappa)$ の連続性から，再び

$$\text{(5.2)} \quad \dim \mathsf{M}(\kappa) = \dim \mathsf{M} = m\,, \ \mathsf{M}(\kappa) = P(\kappa)\mathsf{X}, \ \mathsf{M} = \mathsf{M}(0) = P\mathsf{X}$$

が導かれる．ここで $P = P(0)$ は，固有値 λ に対する T の固有射影である．(5.2) により，$T(\kappa)$ の固有値のうちで Γ の内側に位置するものの重複度の和は m に等しいことが知られる．これらの固有値は，ここでもまた，λ-群を形づくると称せられる．

同じ結果が T の各固有値 λ_h について成り立つ．λ_h の任意の近傍において，$|\kappa|$ が十分に小さいという条件の下では，全重複度が λ_h の重複度 m_h に等しい，$T(\kappa)$ の固有値が存在する．m_h の和は N であるから，$T(\kappa)$ にはこれ以外には固有値は存在しない．これで **$T(\kappa)$ の固有値は κ について連続であるという**命題が証明された（そして正確な意味が与えられた）のである．

上記のところでは，κ のある領域において $T(\kappa)$ が連続であることが仮定された．しかし同様の議論により，$T(\kappa)$ が $\kappa = 0$ において連続であるならば，$T(\kappa)$ の固有値と全射影 $P(\kappa)$ も $\kappa = 0$ において連続であることが知られる．これを示すには，$\kappa \to 0$ のとき，$\zeta \in \Gamma$ について一様に $R(\zeta, \kappa) \to R(\zeta)$ となることに注意すれば十分であろう．$T(\kappa)$ のかわりに，$T_n \to T$, $n \to \infty$ なる点列 $\{T_n\}$ を用いることさえ可能である．そこで $n \to \infty$ とすると，T_n の固有値ならびに全射影は T の固有値，全射影に収束することが導かれる．

以上を要約して，次の定理が得られる．

定理 5.1. $T(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において連続とする．このとき $T(\kappa)$ の固有値は $\kappa = 0$ において連続である．λ を $T = T(0)$ の固有値とするとき，λ-群は十分に小さな $|\kappa|$ に対して定義され，λ-群の全射影 $P(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において連続である．κ-平面の領域または実軸の区間において，$T(\kappa)$ が連続であるな

らば，レゾルベント $R(\zeta,\kappa)$ は上に述べた意味において，二変数 ζ および κ について連続である．

2.　固有値の番号づけ

$T(\kappa)$ が κ について連続であるとき，$T(\kappa)$ の固有値も κ について連続に変化するという，上に証明した事実は，$T(\kappa)$ の固有値の数が必ずしも一定ではないので，全く簡単というわけではない．確かに解析的な場合でさえも同じような事情は存在するのであるが，しかしその場合は，(異った) 固有値の数 s は，非例外的な κ については一定なのである．目下の考察の対象である一般の場合は，この数が κ とともにきわめて不規則に変化する可能性がある．固有値の分裂，癒合が著しく複雑な仕方で生じうるのである．

この不便を回避するために，I-§5.4 で論じた如く，固有値をその（代数的）重複度にしたがって繰り返して数えあげるのが普通である（重複固有値）．作用素の重複固有値は，**順序づけの施されていない** (unordered) N 個の複素数の組を形づくる．$\mathfrak{S}=(\mu_1,\cdots,\mu_N)$ および $\mathfrak{S}'=(\mu_1',\cdots,\mu_N')$ を，それぞれそのような N 個の複素数の組とするとき，**元に適当な番号づけを施したときに**，すべての $n=1,\cdots,N$ について $|\mu_n-\mu_n'|$ が小さいならば，$\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{S}'$ は互いに近接すると考えることができよう．そのような N 個の複素数の組がふたつ与えられたとき，それらの間の**距離** (distance) を

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{S},\mathfrak{S}')=\min\ \max_{n}\left|\mu_n-\mu_n'\right| \tag{5.3}$$

によって定義することさえできる．ここで min は，N 個の複素数の組の一方の元を番号づけするあらゆる方法についてとるのである．たとえば三つの数の組 $(0,0,1)$ と $(0,1,1)$ を考えてみよう．その元の集合 $\{0,1\}$ はこれらふたつの組のどちらにも同じであるが，両者の距離は 1 である．このように定義された距離が，距離函数の公準を満たすことは容易に確かめることができる．

問題 5.1a.　$T,S\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対して $\mathfrak{S}(ST)=\mathfrak{S}(TS)$ ［これは $\Sigma(ST)=\Sigma(TS)$ の精密化である．問題 I-5.4 a を見よ．証明については問題 I-3.8 a を参照］．

さて定理 5.1 によって与えられた $T(\kappa)$ の固有値の連続性は，次のように表現することができる．すなわち，**$T(\kappa)$ の重複固有値から成る N 個の数の組 $\mathfrak{S}(\kappa)$ は κ とともに連続に変化する**．これは，固定された κ_0 のおのおのに対して，$\kappa \to \kappa_0$ とするとき $\mathfrak{S}(\kappa_0)$ から $\mathfrak{S}(\kappa)$ への距離がゼロに収束することを意味する．

このように定式化された連続性は，重複固有値**全体として**の連続性である．各 κ について $T(\kappa)$ の重複固有値を表わす N 個の一価連続函数 $\mu_n(\kappa)$, $n = 1, \cdots, N$ を定義することが可能であるや否や，これはまた別の問題である．そのようなパラメータ表現は，一般には不可能である．これは例 1.1, d) から知られるが，この例ではふたつの固有値は $\pm\kappa^{1/2}$ である．ここで分岐点 $\kappa = 0$ を含む複素平面のある領域において，ふたつの固有値を表現するふたつの一価連続函数を定義することは不可能である．

パラメータ表現が可能であるのは，たとえば次のふたつの条件のうち，いずれかが成り立つ場合である．すなわち i) パラメータ κ が実軸の区間を変化する場合，あるいは ii) 固有値が常に実の場合である．ii) の場合は，固有値 $\mu_n(\kappa)$ を小さなものから順に（あるいは大きなものから順に）番号づけしてゆけば十分であろう．つまり

$$\mu_1(\kappa) \leqq \mu_2(\kappa) \leqq \cdots \leqq \mu_N(\kappa)\,. \tag{5.4}$$

しかしながら，このような番号づけの方法は，いつでも便利というわけではないことに注意すべきである．なぜなら，これとは別の配列をすれば満たされるかもしれない函数の微分可能性を，上記のような配列は壊してしまうことがあるからである．

i) の場合にパラメータ表現が可能になるということは，全く自明とはいえない．これは次の定理に含まれているのである．

定理 5.2. $\mathfrak{S}(\kappa)$ は順序づけられていない N 個の複素数の組で，（閉または開）区間 I の実変数 κ に連続に依存するものとする．このとき，N 個の一価連続函数 $\mu_n(\kappa)$, $n = 1, \cdots, N$ が存在して，各 $\kappa \in \mathrm{I}$ に対するその値は N 個の数の組 $\mathfrak{S}(\kappa)$ を形づくる［$(\mu_n(\kappa))$ を $\mathfrak{S}(\kappa)$ の表現と呼ぶ］．

証明. I_0 を I の部分区間とする．I_0 上で定義され，定理に述べられた性

質を有する N 個の函数が存在するとき，便宜上，I_0 は 性質 (A) をもつということにしよう．証明すべきことは，I 自身が性質 (A) を有すること，これである．まずはじめに，性質 (A) を具えたふたつの部分区間 $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ が共通点を有する場合には，その合併 $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$ もまた必ず同じ性質を有することを示そう．$(\mu_n^{(1)}(\kappa)), (\mu_n^{(2)}(\kappa))$ をそれぞれ $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ における連続函数による $\mathfrak{S}(\kappa)$ の表現とする．I_1 も I_2 も，他の一方を含むことはないと想定してよく（そうでなければ，証明は自明である），また I_1 は I_2 の左に位置するものと仮定してよい．I_1 と I_2 の共通部分に位置する点 κ_0 を固定して考えると，$(\mu_n^{(1)}(\kappa_0))$ と $(\mu_n^{(2)}(\kappa_0))$ はともに同一の $\mathfrak{S}(\kappa_0)$ の表現であるから，$(\mu_n^{(2)})$ に適当に番号のつけかえを施して，$\mu_n^{(1)}(\kappa_0) = \mu_n^{(2)}(\kappa_0), N = 1, \cdots, N$ を得る．こうすると，I_0 上で

$$\mu_n^{(0)}(\kappa) = \begin{cases} \mu_n^{(1)}(\kappa), & \kappa \leqq \kappa_0\,, \\ \mu_n^{(2)}(\kappa), & \kappa \geqq \kappa_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

と定義される函数 $\mu_n^{(0)}(\kappa)$ は連続であり，I_0 上における $\mathfrak{S}(\kappa)$ の表現となっている．

これから次の帰結が導かれる．すなわち部分区間 I' の各点が性質 (A) を具えた近傍を有するならば，I' 自身が必ず性質 (A) を具備しているのである．

これだけの準備の下に，帰納法によって定理 5.2 を証明しよう．$N = 1$ に対して定理が成り立つのは自明である．次に N よりも小さな数について，また任意の区間 I について定理が証明されたことを仮定しよう．$\mathfrak{S}(\kappa)$ の N 個の元が同一であるようなすべての $\kappa \in \mathrm{I}$ の集合を Γ，また I における Γ の補集合を Δ とする．I に導入された相対位相について Γ は閉集合であり，また Δ は開集合である．さて Δ の各点が性質 (A) を具えた近傍を有することを示そう．$\kappa_0 \in \Delta$ とする．$\mathfrak{S}(\kappa_0)$ の N 個の点はすべてが同一ではないから，それらは N_1, N_2 個の元を有するふたつの分離されたグループに分割される．ここで $N_1 + N_2 = N$ である．いい換えれば，$\mathfrak{S}(\kappa_0)$ は分離された元をもつ N_1 個の点の組と，N_2 個の点の組とから成るのである（ここで “分離された” という用語は，一方のグループの元の中には，他方の元に等しいものが存在しないことを意味する）．$\mathfrak{S}(\kappa)$ の連続性により，十分に小さな $|\kappa - \kappa_0|$ については，$\mathfrak{S}(\kappa)$ も同様に N_1 個の点の組と N_2 個の点の組か

ら成り，そのおのおのが κ について連続になることが知られる．帰納法の仮定により，これらの N_1 個の組，N_2 個の組はそれぞれ，κ_0 の近傍 Δ' において，連続函数の族 $(\mu_1(\kappa),\cdots,\mu_{N_1}(\kappa))$, $(\mu_{N_1+1}(\kappa),\cdots,\mu_N(\kappa))$ によって表現することができる．これら N 個の函数を一括して考えれば，それは Δ' における $\mathfrak{S}(\kappa)$ の表現となっている．換言すれば，Δ' は性質 (A) を具えているのである．

Δ は I における開集合であるから，それは高々可算個の部分区間 $\mathrm{I}_1,\mathrm{I}_2,\cdots$ から成っている．Δ の各点は性質 (A) を具えた近傍を有するのであるから，上記の注意により，Δ を構成している各区間 I_p は性質 (A) を有することが知られる．I_p において $\mathfrak{S}(\kappa)$ を表現する N 個の函数を $\mu_n^{(p)}(\kappa)$, $n=1,\cdots,N$ と書き表わすことにしよう．他方，$\kappa\in\Gamma$ に対しては，$\mathfrak{S}(\kappa)$ は N 個の同一の元 $\mu(\kappa)$ から成っている．そこで I 上の N 個の函数 $\mu_n(\kappa)$, $n=1,\cdots,N$ を

$$\mu_n(\kappa)=\begin{cases}\mu_n^{(p)}(\kappa), & \kappa\in\mathrm{I}_p, \quad p=1,2,\ldots,\\ \mu(\kappa), & \kappa\in\Gamma\end{cases} \tag{5.6}$$

と定義する．これら N 個の函数は，全区間 I 上での $\mathfrak{S}(\kappa)$ の表現となっている．各 $\mu_n(\kappa)$ が I 上で連続であることは容易に確かめることができる．これで帰納法が完結し，定理が証明されたのである．

3. 固有空間，固有ベクトルの連続性

$T(\kappa)$ が κ について連続である場合にさえ，固有ベクトルや固有空間は必ずしも連続ではない．先に示したところによれば，λ-群の全射影 $P(\kappa)$ は連続であるが，$P(\kappa)$ は λ-群を形づくる固有値が λ からあまり乖離していない小さな $|\kappa|$ についてのみ定義されるのである．

複素平面の単連結な領域，あるいは実軸の区間におけるすべての κ に対して，$T(\kappa)$ が N 個の相異なる固有値 $\lambda_h(\kappa)$, $h=1,\cdots,N$ を有するならば，それに対応する固有射影 $P_h(\kappa)$ を定義することができ，そのおのおのは 1 次元である．各 $P_h(\kappa)$ は，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ の全射影と同一なのであるから，連続である．しかし一般には，$\lambda_h(\kappa)$ がこれ以外のある $\lambda_k(\kappa)$ と一致している

ような κ の値を超えて，$P_h(\kappa)$ を拡張することはできない．この意味において，固有射影は固有値以上に特異な挙動を呈するのである．解析的な場合においてもなお，$\lambda_h(\kappa)$ が正則となる例外点においては，$P_h(\kappa)$ が存在しない可能性があることを想起しておくべきであろう［例 1.12 f)］．だがその場合，$P_h(\kappa)$ はたかだかひとつの極を有する（§1.8 を見よ）．目下の一般的状況の下では，事情ははるかに劣悪である．きわめて滑らかな函数 $T(\kappa)$ に対してさえ，固有空間が著しく特異な挙動を呈しうることは，レリッヒ[2]による次の例から理解されるであろう．

例 5.3.　$N = 2$ とし，

$$T(\kappa) = e^{-\frac{1}{\kappa^2}} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2}{\kappa} & \sin\dfrac{2}{\kappa} \\ \sin\dfrac{2}{\kappa} & -\cos\dfrac{2}{\kappa} \end{pmatrix}, \quad T(0) = 0 \tag{5.7}$$

とする．$T(\kappa)$ は連続であるばかりでなく，κ のすべての実数値について無限回微分可能である．同様のことが $T(\kappa)$ の固有値についても成り立つ．固有値は，$\kappa \neq 0$ に対しては $\pm e^{-1/\kappa^2}$ であり，$\kappa = 0$ に対してはゼロである．しかし $\kappa \neq 0$ の場合に，これに対応する固有射影は次のようである．

$$\begin{pmatrix} \cos^2\dfrac{1}{\kappa} & \cos\dfrac{1}{\kappa}\sin\dfrac{1}{\kappa} \\ \cos\dfrac{1}{\kappa}\sin\dfrac{1}{\kappa} & \sin^2\dfrac{1}{\kappa} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin^2\dfrac{1}{\kappa} & -\cos\dfrac{1}{\kappa}\sin\dfrac{1}{\kappa} \\ -\cos\dfrac{1}{\kappa}\sin\dfrac{1}{\kappa} & \cos^2\dfrac{1}{\kappa} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

これらの行列函数は，$\kappa = 0$ を含まない任意の区間において連続である（無限回微分可能でさえある）．しかしこれらを連続函数として $\kappa = 0$ へ拡張することはできない．さらに，$\kappa = 0$ の近傍において連続で，しかも $\kappa = 0$ においてゼロにならないような，$T(\kappa)$ のいかなる固有ベクトルも存在しないことは容易に知られる．

実数 κ のおのおのに対して，(5.7) は（ユニタリ空間とみなされた C^2 において作用する）対称作用素であることに注意しなければならない．とくに (5.7) は正規であり，したがって，もし $T(\kappa)$ が正則であったなら，固有射影は $\kappa = 0$ において正則となるはずである（定理 1.10）．この例は，$T(\kappa)$ の正則性を無限回微分可能性で置き換えた場合，固有射影のこの滑らかさが完全に欠落しうることを示している点で興味深いものである．

---

[2] Rellich [1] を見よ．便宜上，もとの事例を少しだけ修正してある．

4. 一点での微分可能性

さて，$T(\kappa)$ が連続であるばかりでなく，微分可能でもあることを仮定しよう．一般にこの仮定から，$T(\kappa)$ の固有値の微分可能性は導かれない．実際，$T(\kappa)$ が正則の場合にさえ，$T(\kappa)$ の固有値は微分可能とは限らないのである［例 1.1, d)］．しかし次の定理が得られる．

定理 5.4. $T(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において微分可能とする．このとき λ-群の全射影 $P(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において微分可能である：すなわち

$$P(\kappa) = P + \kappa P^{(1)} + o(\kappa)\,. \tag{5.9}$$

ここで[3] $P^{(1)} = -PT'(0)S - ST'(0)P$ であり，S は T の λ に対する被約レゾルベント（I- §5.3 を見よ）である．λ が T の半単純固有値ならば，$T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値は $\kappa = 0$ において微分可能である．すなわち

$$\mu_j(\kappa) = \lambda + \kappa \mu_j^{(1)} + o(\kappa)\,, \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{5.10}$$

ここで $\mu_j(\kappa)$ は λ-群を形づくる重複固有値，$\mu_j^{(1)}$ は部分空間 $\mathsf{M} = P\mathsf{X}$ における $PT'(0)P$ の重複固有値（P は λ に対する T の固有射影）である．T が対角化可能であれば，すべての固有値は $\kappa = 0$ において微分可能である．

注意 5.5. 上記の定理には若干の注釈を施しておく必要がある．$T(\kappa)$ の固有値が微分可能であるとは，$T(\kappa)$ の重複固有値から成る N 個の数の組 $\mathfrak{S}(\kappa)$ が微分可能であることを意味する．λ-群を形づくる固有値の微分可能性についても同様である．また（順序づけを施されていない）N 個の数の組 $\mathfrak{S}(\kappa)$ が $\kappa = 0$ において微分可能であるとは，$\mathfrak{S}(\kappa)$ が $\kappa = 0$ のある近傍で，$\kappa = 0$ において微分可能な N 個の函数 $\mu_n(\kappa)$, $n = 1, \cdots, N$ によって表現されうることを意味する．$\mu_n'(0)$ から成る N 個の数の組 $\mathfrak{S}'(0)$ を，$\mathfrak{S}(\kappa)$ の $\kappa = 0$ における導函数と呼ぶ．このような $\mathfrak{S}'(0)$ の定義は，$\mathfrak{S}(\kappa)$ の特定の表現 $(\mu_n(\kappa))$ から独立であることが（たとえば N についての帰納法により）容易に示される．$\mathfrak{S}(\kappa)$ が各 κ において微分可能で，しかも $\mathfrak{S}'(\kappa)$ が連続であ

---

[3] ここで $o(\kappa)$ は，通常の意味で $\|F(\kappa)\| = o(\kappa)$ を満たす作用素値の函数 $F(\kappa)$ を表わしている．I-§4.7 を見よ．

るとき，$\mathfrak{S}(\kappa)$ は連続微分可能であるという．

$\kappa=0$ のごく小さな近傍においてさえも，$\mathfrak{S}(0)$ および $\mathfrak{S}'(0)$ の両者によって $\mathfrak{S}(\kappa)$ の挙動が決定されるとは限らない．たとえば，$\mathfrak{S}_1(\kappa)=(\kappa, 1-\kappa)$, $\mathfrak{S}_2(-\kappa, 1+\kappa)$ は $\kappa=0$ において，共通の値 $(0,1)$ と共通の導函数 $(1,-1)$ を有するのである．

定理 5.4 の証明.　I-(4.28) から

$$\left[\frac{\partial}{\partial \kappa} R(\zeta, \kappa)\right]_{\kappa=0} = -R(\zeta)\, T'(0)\, R(\zeta) \tag{5.11}$$

が導かれるので，レゾルベント $R(\zeta,\kappa)$ は $\kappa=0$ において微分可能であることにまず注意しよう．ここでまた，(5.11) は $\mathrm{P}(T)$ のコンパクト部分集合に属する ζ について一様に存在することに留意しなければならない．それは $\kappa\to 0$ のとき $R(\zeta,\kappa)\to R(\zeta)$ が一様に成り立つことによる（第1項を見よ）．$P(\kappa)$ に対する表現 (1.16) を考えると，$P(\kappa)$ は $\kappa=0$ において微分可能で，

$$\begin{aligned} P'(0) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial \kappa} R(\zeta, \kappa)\right]_{\kappa=0} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\zeta)\, T'(0)\, R(\zeta)\, d\zeta \\ &= -P\,T'(0)\,S - S\,T'(0)\,P = P^{(1)} \quad [(2.14)\ 参照] \end{aligned} \tag{5.12}$$

が得られる．これで (5.9) が示されたのである．

解析的な場合と同様，λ が半単純な場合には，$T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値は

$$\mu_j(\kappa) = \lambda + \kappa\, \mu_j^{(1)}(\kappa), \qquad j=1,\ldots,m \tag{5.13}$$

なる形をもつ．ここで $\mu_j^{(1)}(\kappa)$ は，作用素

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{(1)}(\kappa) &= \kappa^{-1}\big(T(\kappa)-\lambda\big)\,P(\kappa) \\ &= -\frac{\kappa^{-1}}{2\pi i}\int_\Gamma (\zeta-\lambda)\, R(\zeta,\kappa)\, d\zeta \end{aligned} \tag{5.14}$$

の，部分空間 $\mathsf{M}(\kappa)=P(\kappa)\mathsf{X}$ における（重複）固有値である［(2.37) を見

よ]．λ が半単純の場合には $T(\kappa)$ と $P(\kappa)$ は $\kappa=0$ において微分可能であり，また $(T-\lambda)P=0$ であるから，

$$\widetilde{T}^{(1)}(0)=T'(0)\,P+(T-\lambda)\,P'(0)=P\,T'(0)\,P \tag{5.15}$$

とおけば，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ は $\kappa=0$ において連続である．ここで (5.12) および $(T-\lambda)S=1-P$ を用いた [(2.11) を見よ]．それゆえ $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の固有値は $\kappa=0$ において連続である．とくに，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の，不変部分空間 $\mathsf{M}(\kappa)$ における固有値 $\mu_j^{(1)}(\kappa)$ は，$\kappa\neq 0$ においては必ずしも連続ではないが，$\kappa=0$ においては連続である（定理 5.1 を見よ）．(5.13) に鑑れば，これで (5.10) が示されたことになる．

5. 区間における微分可能性

これまでのところでは，固有値および固有射影の，一点 $\kappa=0$ における微分可能性が考察の対象であった．さてここで，$T(\kappa)$ が κ のある領域で微分可能であることを仮定し，固有値や固有射影の，この領域における微分可能性について考えよう．これがもし複素平面の領域ならば，$T(\kappa)$ は必然的に正則である．このケースについては既に詳しく論じたので，今後は，$T(\kappa)$ が**実軸**のある区間 I において定義され，しかも微分可能であることを想定しよう[4]．

定理 5.4 によれば，**$T(\kappa)$ が $\kappa\in \mathrm{I}$ について対角化可能である限り**，$T(\kappa)$ の N 個の重複固有値の組 $\mathfrak{S}(\kappa)$ は $\kappa\in \mathrm{I}$ について微分可能である．しかし $T(\kappa)$ の重複固有値を表現する，一価でしかも I の全域で微分可能な N 個の函数 $\mu_n(\kappa)$, $n=1,\cdots,N$ が存在するや否やは，決して自明なことではない．ところが実は，次の一般的な定理から知られるように，これは正しいのである．

定理 5.6. $\mathfrak{S}(\kappa)$ は区間 I における実変数 κ に依存する N 個の複素数の順

[4] $T(\kappa)$ が各実数 κ について対称的である場合の固有値の微分可能性は，Rellich [8] において詳しく研究された．この特別の場合においてさえ，問題が自明であるなどとはとてもいえないことに注意を要する．

序づけを施されていない組とし，また $\mathfrak{S}(\kappa)$ は各 $\kappa \in \mathrm{I}$ において（注意 5.5 の意味で）微分可能とする．このとき，$\kappa \in \mathrm{I}$ に対して N 個の数の組 $\mathfrak{S}(\kappa)$ を表現し $\kappa \in \mathrm{I}$ においてそれぞれが微分可能な N 個の複素数値函数 $\mu_n(\kappa)$, $n = 1, \cdots, N$ が存在する．

証明.　I の部分区間のうち，その上で定理の命題中に述べた性質をもつ N 個の函数が存在するものは，性質 (B) を有するということにしよう．すると I 自身が性質 (B) を有することを証明しなければならないわけである．定理 5.2 の証明と同様に，性質 (B) を有し，互いに重なりあう[5]任意の部分区間 I_1, I_2 については，それらの合併 $\mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$ もまた性質 (B) を有することを証明することができる．ただひとつだけ気をつけておかねばならない点は，$\mu_n^{(2)}(\kappa)$ の番号のつけかえに際して，延長 (5.5) が函数の $\kappa = \kappa_0$ における微分可能性を確実に保存するように注意すべきこと，これである．そしてこれが可能であるのは，$\mathfrak{S}(\kappa)$ が $\kappa = \kappa_0$ において微分可能であるという仮定による．

この考察を念頭におくと，証明は定理 5.2 のそれと同様の手順で遂行される．ただし (5.6) によって定義される函数は，Γ の**孤立点** (isolated point) において導函数が不連続となる可能性があるので，最終段階で，わずかな修正が必要となるであろう．この点を斟酌して，次のような段取りで進もう．Γ の孤立点 κ_0 は I の境界点であるか，あるいは I_p と I_q とに共通な境界点になっている．第一の場合については，何もすべきことはない．第二の場合は，ふたつの族 $\left(\mu_n^{(p)}(\kappa)\right)$, $\left(\mu_n^{(q)}(\kappa)\right)$ の後者に適当な番号のつけかえを施し，これらを“滑らかに”“つなぎあわせる”ことが容易にできる．なぜなら，これら微分可能な函数から成るふたつの族は，$\kappa = \kappa_0$ の相異なる側において $\mathfrak{S}(\kappa)$ を表現し，しかも $\mathfrak{S}(\kappa)$ は $\kappa = \kappa_0$ において微分可能だからである．したがって I_p, I_q および κ_0 から成る区間は性質 (B) を有する．

Γ' を Γ の孤立点の集合とする．$\Delta \cup \Gamma'$ は I に導入された相対位相について開集合で，(たかだか) 可算個の部分区間 I'_k から成る．そしてまた各 I'_k は，Γ' の一点において上に述べた方法で相互に結合される I_p という形態の可算個の部分区間から構成されている．この結合のプロセスの反復適用により，これらの I_p において $\mathfrak{S}(\kappa)$ を表現する函数をつなぎあわせ I'_k 上で微分

[5] ここで“互いに重なりあう”という言葉は，ふたつの区間が共通の内点をもつことを意味する．

可能な N 個の函数の族を形づくることができる．こうして各 I'_k が性質 (B) をもつことが示されたのである．

さて次に，全区間 I 上で $\mathfrak{S}(\kappa)$ を表現する N 個の微分可能な函数 $\mu_n(\kappa)$ を，(5.6) の方法によって構成してゆくことができる．ただしここで Γ における Γ' の補集合を Γ'' とし，I_p および Γ をそれぞれ I'_k, Γ'' で置きかえて考えなければならない．このように定義された $\mu_n(\kappa)$ の Γ'' の一点 κ_0 における微分可能性は，導函数 $\mathfrak{S}'(\kappa_0)$ が $\mathfrak{S}(\kappa_0)$ と同様，N 個の同一の元から構成されるという事実から簡単に導かれるのである．これで定理 5.6 の証明が完了する．

定理 5.7. 定理 5.6 において，導函数 $\mathfrak{S}'(\kappa)$ が連続ならば，N 個の函数 $\mu_n(\kappa)$ は I 上において連続微分可能である．

証明. $\kappa = \kappa_0$ において，$\mu'_n(\kappa)$ の実部が不連続であると想定する．微分に関する周知の結果により，κ_0 の任意の近傍において $\mathrm{Re}\,\mu'_n(\kappa)$ のとる値は，ある固定された正の数よりも大きな長さの区間を覆う[6]．しかし $\mathfrak{S}'(\kappa)$ が連続な場合には，これは不可能である．なぜなら $\mu'_n(\kappa)$ のどの値も，$\mathfrak{S}'(\kappa)$ の N 個の元のうちに含まれているからである．同じ理由により，$\mathrm{Im}\,\mu'_n(\kappa)$ もまた，いかなる点においても不連続たりえない．

注意 5.8. $T(\kappa)$ が $\kappa \in \mathrm{I}$ に対して微分可能かつ対角化可能であるとき，$T(\kappa)$ の固有値が I 上で微分可能となることは既に見た（定理 5.4）．そこで，$T(\kappa)$ が連続微分可能かつ対角化可能ならば，固有値は連続微分可能になると予想するのはきわめて自然である．ところが次の例から知られるとおり，こ

[6] 実変数 t の実数値函数 $f(t)$ が $a \leqq t \leqq b$ について微分可能であるとしよう．このとき $f'(t)$ はこの区間において $\alpha = f'(a)$ と $\beta = f'(b)$ の間にあるすべての値をとる．これを示すために，$\alpha < \beta$ と仮定してよいであろう．任意の $\gamma \in (\alpha, \beta)$ に対して，$g(t) = f(t) - \gamma t$ とおく．すると $g'(a) = \alpha - \gamma < 0$, $g'(b) = \beta - \gamma > 0$ であり，したがって連続函数 $g(t)$ は一点 $t = c \in (a, b)$ において最小値をとる．それゆえ $g'(c) = 0$ すなわち $f'(c) = \gamma$ である．$f'(t)$ が $t = t_0$ において不連続とすれば，十分に小さな $\varepsilon > 0$ をとると，t_0 の任意の近傍の中に $|f'(t_1) - f'(t_2)| > \varepsilon$ を満たす t_1, t_2 が存在する．上記の結果から，$f'(t)$ は $f'(t_1)$ と $f'(t_2)$ の間のあらゆる値をとる．ゆえに t_0 の任意の近傍において $f'(t)$ のとる値は，長さが ε よりも大きな区間を覆うのである．

の予想は正しくない[7].

例 5.9. $N=2$ とし，また

$$T(\kappa)=\begin{pmatrix} |\kappa|^\alpha & |\kappa|^\alpha-|\kappa|^\beta\left(2+\sin\dfrac{1}{|\kappa|}\right) \\ -|\kappa|^\alpha & -|\kappa|^\alpha \end{pmatrix},\quad \kappa\neq 0;$$
$$T(0)=0 \tag{5.16}$$

とする．$\alpha>1$, $\beta>2$ ならば，$T(\kappa)$ はすべての実数 κ について連続微分可能である．$T(\kappa)$ のふたつの固有値は

$$\mu_\pm(\kappa)=\pm|\kappa|^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(2+\sin\frac{1}{|\kappa|}\right)^{\frac{1}{2}},\kappa\neq 0,\quad \mu_\pm(0)=0 \tag{5.17}$$

である．$\kappa\neq 0$ に対しては，$\mu_\pm(\kappa)$ は互いに相異なる値なので，$T(\kappa)$ は対角化可能である．また $T(0)=0$ は明らかに対角化可能である．一般的理論の要請する如く，$\mu_\pm(\kappa)$ はいたるところで微分可能である．しかし $\alpha+\beta\leqq 4$ の場合には，それらの導函数は $\kappa=0$ において不連続となる．この単純な例は，非解析的な摂動がかなり異常な挙動を呈しうることを，再び示すものとなっている．

注意 5.10. $\kappa=0$ のある近傍において $T(\kappa)$ が連続微分可能で，λ は $T(0)$ の半単純固有値とする．このとき (5.12) および (5.14) から知られるとおり，$\kappa=0$ の近傍において λ-群の全射影 $P(\kappa)$ は連続微分可能で，また $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ は連続である．

6. 固有値および固有ベクトルの漸近展開

これまでの諸項において考察された固有値の微分可能性は，幾分異なった視点から研究することもできる．定理5.4は，$T(\kappa)$ が漸近形 $T(\kappa)=T+\kappa T'+o(\kappa)$ を有するときに，固有値 $\mu_j(\kappa)$ を κ の第一次項まで漸近展開する式を与えるものとみなすことができる．ここで $T'=T'(0)$ である．次に第二次の項に進んで，$T(\kappa)$ が漸近形 $T+\kappa T^{(1)}+\kappa^2T^{(2)}+o(\kappa^2)$ を有するときの，固

[7] この例の作用素は対称的ではない．対称作用素については，すこし良好な挙動が期待される．定理6.8および注意6.9aを見よ．

有値の漸近挙動を，同じように研究することができる．定理 5.4 をこの方向に拡張することは，かなり容易である．

定理 5.11. $\kappa\to 0$ のとき $T(\kappa)=T+\kappa T^{(1)}+\kappa^2T^{(2)}+o(\kappa^2)$ とする．λ は T の固有値で，P はその固有射影とする．このとき $T(\kappa)$ の λ-群を形づくる固有値の全射影 $P(\kappa)$ は

$$P(\kappa)=P+\kappa\,P^{(1)}+\kappa^2\,P^{(2)}+o\,(\kappa^2) \tag{5.18}$$

なる形式を有する．ここで P, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ は (2.13) によって与えられている．T の固有値 λ が半単純で，また $\lambda_j^{(1)}$ を $PT^{(1)}P$ の $P\mathsf{X}$ における固有値とし，$P_j^{(1)}$ はその固有射影とする．このとき $T(\kappa)$ は $\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}+o(\kappa)$ なる形をもつ，ちょうど $m_j^{(1)}=\dim P_j^{(1)}$ 個の重複固有値（$\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}$-群）を有する．この群の全固有射影 $P_j^{(1)}(\kappa)$ は

$$P_j^{(1)}(\kappa)=P_j^{(1)}+\kappa\,P_j^{(11)}+o\,(\kappa) \tag{5.19}$$

なる形式を有する．さらに加えて，$PT^{(1)}P$ の固有値 $\lambda_j^{(1)}$ が半単純であるならば，$P_j^{(11)}$ は (2.47) によって与えられ，$\lambda+\kappa\lambda_j^{(1)}$-群を形づくる $m_k^{(1)}$ 個の重複固有値は

$$\mu_{jk}(\kappa)=\lambda+\kappa\,\lambda_j^{(1)}+\kappa^2\,\mu_{jk}^{(2)}+o\,(\kappa^2),\quad k=1,\dots,m_j^{(1)}, \tag{5.20}$$

なる形式を有する．ここで $\mu_{jk}^{(2)}$, $k=1,\cdots,m_k^{(1)}$ は，$P_j^{(1)}\widetilde{T}^{(2)}P_j^{(1)}=P_j^{(1)}T^{(2)}P_j^{(1)}-P_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)}$ の，部分空間 $P_j^{(1)}\mathsf{X}$ における重複固有値である．

証明. $T(\kappa)$ の第二次項までの漸近展開の可能性により，レゾルベントについても同様のことが導かれる．

$$\begin{aligned} R\,(\zeta,\kappa)&=R\,(\zeta)-R\,(\zeta)\big(T(\kappa)-T\big)\,R\,(\zeta)\\ &\quad+R\,(\zeta)\big(T(\kappa)-T)R\,(\zeta)\big(T(\kappa)-T\big)\,R\,(\zeta)+\cdots+\\ &=R\,(\zeta)-\kappa\,R\,(\zeta)\,T^{(1)}\,R\,(\zeta)+\kappa^2\big[-R\,(\zeta)\,T^{(2)}\,R\,(\zeta)\\ &\quad+R\,(\zeta)\,T^{(1)}\,R\,(\zeta)\,T^{(1)}\,R\,(\zeta)\big]+o\,(\kappa^2). \end{aligned} \tag{5.21}$$

ここで $o(\kappa^2)$ は，$\mathrm{P}(T)$ の各コンパクト部分集合上で，ζ について一様であ

る．解析的な場合と全く同様に，(5.21) を (1.16) に代入すれば (5.18) を得る．

したがって，λ が半単純ならば，(5.14) の $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ は

$$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa) = PT^{(1)}P + \kappa\widetilde{T}^{(2)} + o(\kappa) \tag{5.22}$$

なる形式を有する．ここで $\widetilde{T}^{(2)}$ は (2.20) によって与えられている．さて定理 5.4 を $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ に対して適用すると，定理の帰結が導かれる．第二次項 κ^2 までの各項の計算は，再び解析的な場合と全く同じである．

7.　複数のパラメータに依存する作用素

これまでのところでは，単一のパラメータ κ に依存する作用素 $T(\kappa)$ が考察の対象であった．そこで次に，ふたつの複素または実変数 κ_1, κ_2 に依存する作用素 $T(\kappa_1, \kappa_2)$ を考えることにしよう．

固有値の連続性については，なにも新奇なものはない．$T(\kappa_1, \kappa_2)$ が連続ならば，固有値は κ_1, κ_2 について（第 1，2 項において説明した意味で）連続である．さらにまた，(変数 κ_1, κ_2 が実のとき）偏微分の可能性についても同様のことが成り立つ．ところが**全微分可能性**については，ある特異な事情が発生する．つまり $T(\kappa_1, \kappa_2)$ の全微分可能性からは，たとえ $T(\kappa_1, \kappa_2)$ が対角化可能と仮定してさえも，固有値の全微分可能性は必ずしも導かれないのである（定理 5.4 を参照）．

例 5.12.[8]　$N = 2$ とし，また

$$T(\kappa_1, \kappa_2) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & -\kappa_1 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

とする．$T(\kappa_1, \kappa_2)$ は κ_1, κ_2 について全微分可能で，κ_1, κ_2 のすべての実数値について対角化可能である．しかしその固有値

$$\lambda_\pm(\kappa_1, \kappa_2) = \pm(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2} \tag{5.24}$$

は，$\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ において全微分可能ではない．

$T(\kappa_1, \kappa_2) = 0$ が二変数について正則な場合も考えることができるけれど

[8] Rellich [1] を見よ．

も，$T(\kappa_1, \kappa_2)$ の固有値は，上記の例から知られるとおり，かなり複雑で特異な挙動を呈する可能性があるのである[9].

注意 5.13.　$\mathsf{X} = \mathsf{C}^2$ に通常の内積を導入すると，(5.23) は実数 κ_1, κ_2 について対称的となる．このように (5.24) の類の特異点の発現を観察すると，その状況が単一変数の場合とは異なることがわかる．一変数の場合は，実数 κ に対して $T(\kappa)$ が正規ならば，固有値は $\kappa = 0$ において正則となるのである（定理 1.10 を見よ）．

変数が二個以上の場合にも，同様の注意があてはまる．

非解析的摂動においては，固有射影 $P_h(\kappa)$ と固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ の挙動が著しく煩雑になりうることを上で見た．多くの場合，これらの厄介は，κ の変化に伴う相異なる固有値の数の変化が不連続たりうるという事実から生ずる．仮にこの数 s が，κ の領域 D において一定であると**仮定**すれば，これらの問題は通常は消失する．そこで，これに関連するいくつかの結果を論じておこう．

定理 5.13 a.[10]　$\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ が単連結な領域 $\mathrm{D} \subset \mathsf{R}^m$ において変化するとき，$T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ は $\boldsymbol{C}^k$-級（k 階連続微分可能）とする．また $\kappa \in \mathrm{D}$ に対して，$T(\kappa)$ の相異なる固有値 $\lambda_h(\kappa)$ の数 s は一定と仮定する．このとき，$\lambda_h(\kappa)$ は D において $\boldsymbol{C}^k$-級であり，$P_h(\kappa)$ や $D_h(\kappa)$ も同様である．

証明.　第 1，2 項において論じた $\lambda_h(\kappa)$ の連続性により，すべての $\kappa \in \mathrm{D}$ に対して，λ_h, P_h，および $D_h (h = 1, \cdots, s)$ の示された番号づけが可能であることに注意しよう．定理の主張は κ についての局所的性質であるから，κ を $\kappa = 0$ の小さな近傍に限定して考えてよいであろう（一般性を失うことなく，$0 \in \mathrm{D}$ と想定する）．すると $P_h(\kappa)$ は線積分 (1.16) によって与えられ，ここで $|\kappa|$ が十分に小さい限り，$\Gamma = \Gamma_h$ は $\lambda_h(0)$ のまわりの固定された円として選ぶことができる．$T(\kappa)$ は κ について $\boldsymbol{C}^k$-級であるから，$R(\zeta, \kappa)$ もまた κ について $\boldsymbol{C}^k$-級であり，それは $\zeta \in \Gamma_h$ に対して一様であ

---

[9] しかし単純固有値およびそれに随伴する固有射影は，再び κ_1, κ_2 について正則となる．注意 5.13b を見よ．

[10] Nomizu [1] 参照.

ることが容易にわかる．(1.16) から，$P_h(\kappa)$ が C^k-級であることが導かれる．$m = m_h = \dim P_h(\kappa) =$ 一定として公式 (2.5) を見ると，$\lambda_h(\kappa)$ が C^k-級であることが知られ，また (2.7) によれば，同様のことが $D_h(\kappa)$ についても成り立つことがわかる．

注意 5.13 b.　s が一定であることを仮定する限りにおいて，C^k という性質を，複数変数（実または複素）$\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_m)$ についての解析性で置き換えても，同様の結果が成り立つ．

定理 5.13 c.　$\mathsf{D} \subset \mathsf{R}^m$ は定理 5.13 a と同様とし，$T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X}_1, \mathsf{X}_2)$ は $\kappa \in \mathsf{D}$ について C^k-級とする．また $\kappa \in \mathsf{D}$ について $\operatorname{rank} T(\kappa) = r$ は一定と仮定する．このとき D 上において C^k-級でしかも $\dim Q_j(\kappa) = r$ を満たす射影のふたつの族 $Q_j(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X}_j)$ $(j = 1, 2)$ を適当に選び，$T(\kappa)$ の像が $Q_2(\kappa)\mathsf{X}_2$，零空間が $(1 - Q_1(\kappa))\mathsf{X}_1$ とすることができる．$\kappa \in \mathsf{D}$ について C^k-級で，像が $Q_1(\kappa)\mathsf{X}_1$ かつ零空間が $(1 - Q_2(\kappa))\mathsf{X}_2$ となる作用素 $S(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$ を適当に選び，$S(\kappa)T(\kappa) = Q_1(\kappa)$ でしかも $T(\kappa)S(\kappa) = Q_2(\kappa)$ とすることができる．さらに適当なノルムを選ぶことによって X_j がヒルベルト空間となる場合には，$Q_j(\kappa)$ は直交射影となるように選ぶことができる．

証明．　X_j がヒルベルト空間であることを仮定し，また X_j^* を X_j と同一視してよいであろう．このとき $T(\kappa)^* \in \mathcal{B}(\mathsf{X}_2^*, \mathsf{X}_1^*) = \mathcal{B}(\mathsf{X}_2, \mathsf{X}_1)$ もまた $\kappa \in \mathsf{D}$ について C^k-級である．$H(\kappa) = T(\kappa)T(\kappa)^*$ としよう．$H(\kappa)$ は X_2 における非負定符号で自己随伴的な作用素である．I-§6.4 により，$H(\kappa)$ は $T(\kappa)^*$ と同一の零空間を有し，したがって $\operatorname{rank} H(\kappa) = r$ でまた $\operatorname{nul} H(\kappa) = N - r$ である．このように $H(\kappa)$ の固有値ゼロは一定の重複度 $N - r$ をもち，他の固有値から分離される．定理 5.13 a の証明において与えられた議論から知られるように，それに対応する次元 $N - r$ の（直交）固有射影 $P(\kappa)$ は κ について C^k-級である．$T(\kappa)^*$ は $H(\kappa)$ と同じ零空間 $P(\kappa)\mathsf{X}_2$ を有するから，$Q_2(\kappa) = 1 - P(\kappa)$ とすれば，$T(\kappa)$ の像は $Q_2(\kappa)\mathsf{X}_2$ であり，$Q_2(\kappa)$ の次元は r で，しかも $Q_2(\kappa)$ は κ について C^k-級である．

　同様にして，X_1 における自己随伴作用素 $T(\kappa)^*T(\kappa)$ を考察することにより，$T(\kappa)$ が零空間 $(1 - Q_1(\kappa))\mathsf{X}_1$ を有することを証明することができる．

ここで $Q_1(\kappa)$ は次元 r の直交射影で，κ について $\boldsymbol{C}^k$-級である．

相対逆作用素 $S(\kappa)$ は

$$S(\kappa) = T(\kappa)^* K(\kappa) \tag{5.24 a}$$

とすることによって構成することができる．ここで $K(\kappa)$ は $H(\kappa)$ の固有値ゼロに対する被約レゾルベントである（I-§5.3 を見よ）．容易に確認できるように，$K(\kappa)$ は

$$K(\kappa) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \bigl(H(\kappa)-\zeta\bigr)^{-1}\zeta^{-1}\,d\zeta \tag{5.24 b}$$

によって与えられる．ここで Γ は $H(\kappa)$ のゼロでない固有値すべてを除外した，ゼロの周囲の小さな円である．(5.24 b) によれば，$K(\kappa)$ は κ について $\boldsymbol{C}^k$-級である．また (5.24 a) から，$T(\kappa)S(\kappa) = H(\kappa)K(\kappa) = 1 - P(\kappa) = Q_2(\kappa)$ が導かれる．すると $T(\kappa)S(\kappa)T(\kappa) = Q_2(\kappa)T(\kappa) = T(\kappa) = T(\kappa)Q_1(\kappa)$. ゆえに $T(\kappa)[S(\kappa)T(\kappa) - Q_1(\kappa)] = 0$. $S(\kappa)\mathsf{X}_2 \subset T(\kappa)^*\mathsf{X}_2 = Q_1(\kappa)\mathsf{X}_1$ であるから，これにより $S(\kappa)T(\kappa) = Q_1(\kappa)$ が得られ，定理 5.13 c の証明が完了する．

注意 5.13 d. 定理 5.13 c において $m = 1$ とする．このとき $Q_j(\kappa)$ はこれに対応する，κ についてやはり $\boldsymbol{C}^k$-級の変換函数 $U_j(\kappa)$ を有する．$k = 1$ の場合については，この点は注意 4.3 で述べておいた．そして同様の証明法が一般の k についても妥当する．さらに $Q_j(\kappa)$ は直交射影であるから，$\kappa \in \mathrm{D}$ について $U_j(\kappa)$ は**ユニタリ**である（後述の §6.2 を見よ）．この $U_j(\kappa)$ を使うと，$T_0(\kappa) = U_2(\kappa)^{-1}T(\kappa)U_1(\kappa)$ に対して，$T_0(\kappa) = Q_2(0)T_0(\kappa) = T_0(\kappa)Q_1(0)$ を得る．換言すれば，κ について $\boldsymbol{C}^k$-級の適当なユニタリ変換函数 $U_j(\kappa)$ を用いることによって，$T(\kappa)$ を固定された像 $Q_2(0)\,\mathsf{X}_2$ と固定された零空間 $(1 - Q_1(0))\,\mathsf{X}_1$ をもつ作用素 $T_0(\kappa)$ に転換することができるのである[11]（解析的な場合については，注意 4.10 を参照）．

---

[11] これらの結果は正則な族に対する対応物（注意 4.10）の変形であるが，それはドレザールの定理として知られている．Doležal [1], Weiss and Falb [1] を見よ．$m > 1$ の場合についてこれらの結果が成り立つかどうかはわかっていないようである．

8.　作用素の函数としての固有値

摂動論においてパラメータ κ を導入することは，時として現実的状況に対応するものとなるけれども，また時としてかなり人工的なものでもある．むしろ作用素 T がわずかに変化したとき，T の固有値がいかに変化するかを，なんらかのパラメータ κ あるいは複数のパラメータ $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ を導入することなく考察することもできるのである．このより広い視点から眺めてみると，T の固有値は T 自身の函数とみなすべきであろう．しかるに，固有値はその個数が固定していないので，この解釈に立つ場合にはある種の注意が必要である．ここでもまた，T の N 個の重複固有値から成る，順序づけを施されていない N 個の数の組 $\mathfrak{S}[T]$ を，T の函数として考えるのが便利である．これは $\mathfrak{S}[T]$ を，X の固定された基底に関する T の行列表現を形づくる N^2 個の要素の函数とみなすことに等しい．

定理 5.14.　$\mathfrak{S}[T]$ は T の連続函数である．ただしこの意味するところは，任意の固定された作用素 T について，$\mathfrak{S}[T+A]$ と $\mathfrak{S}[T]$ との距離が $\|A\| \to 0$ とともにゼロに収束すること，これである．

この定理の証明は，κ の函数としての $\mathfrak{S}(\kappa)$ の連続性を示した第1，2項の結果に含まれている．そこでの議論を吟味してみれば，パラメータ κ の使用が本質的ではないことが知られるであろう．

$\mathfrak{S}[T]$ のこの連続性は，変数 T の任意の有界な一般領域（すなわち，$\|T\|$ が有界であるような一般領域）では当然一様である．なぜなら，上に注意したとおり，変数 T は N^2 個の複素変数と同等だからである．しかし，$T+\kappa T^{(1)}+\cdots$ の固有値のピュイズー級数が $\lambda+\alpha\kappa^{1/p}+\cdots$ なる形式をもちうるという事実からわかるように，ある特別な T（非対角化可能な T）においては，連続度はきわめて弱い可能性がある［(1.7) および例 1.1 d) を見よ］．

さて次に，$\mathfrak{S}[T]$ の微分可能性について考えよう．既に見たように，$T(\kappa)$ が解析的な場合でさえ，固有値は必ずしも微分可能ではない．他方，T が対角化可能な場合は，任意の $T^{(1)}$ に対して $T+\kappa T^{(1)}$ の固有値は $\kappa=0$ において微分可能で（第4項の意味において），すべての $T^{(1)}$ についてこれが成り立つためには，T の対角化可能性が必要である．これから次の定理が示さ

れる.

定理 5.15. $\mathfrak{S}[T]$ が $T = T_0$ において偏微分可能であるためには, T_0 が対角化可能であることが必要十分である.

ここで"偏微分可能"とは, 任意の固定された $T^{(1)}$ に対して, $\mathfrak{S}[T+\kappa T^{(1)}]$ が $\kappa = 0$ において微分可能であることを意味し, このことから, $\mathfrak{S}[T]$ を N^2 個の行列要素の函数とみなしたとき, それが N^2 個の変数のそれぞれについて偏微分可能であることが導かれる.

定理 5.15 において, " 偏微分 " ということばを " 全微分 " に置き換えて得られる命題は正しくない. この点は例 5.12 からわかる. それによると, T の変化を $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ の二次元部分空間に限定した場合でさえ, $\mathfrak{S}[T]$ は全微分可能とは限らないのである. 一般に $T \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ の複素数値函数 $\mu[T]$ に対して, $A \in \mathcal{B}(\mathsf{X})$ について線形で, しかも

(5.25)

$$\|A\| \to 0 \quad \text{とするとき} \quad \|A\|^{-1} \left| \mu[T_0 + A] - \mu[T_0] - \nu_{T_0}[A] \right| \to 0$$

を満たす函数 $\nu_{T_0}[A]$ が存在するとき, $\mu[T]$ は $T = T_0$ において全微分可能であるという. すべてのノルムは同値であるから, この定義は用いられる特定のノルムには依存しない. $\nu_{T_0}[A]$ を $\mu[T]$ の $T = T_0$ における**全微分** (total differential) と呼ぶ. $\mu[T]$ が全微分可能であるためには, それが T を表現する行列の N^2 個の要素の函数として全微分可能であることが必要十分であり, これは容易に知られる.

実際にはここでわれわれは単一の複素数値函数 $\mu[T]$ を考えているのではなく, 順序づけを施されていない N 個の数の組 $\mathfrak{S}[T]$ を T の函数として考えている. もし $\mathfrak{S}[T]$ が順序づけを施された N 個の数の組であるとするならば, 上記の定義はただちに $\mathfrak{S}[T]$ へと拡大することができよう. しかし $\mathfrak{S}[T]$ は順序づけを施されていないのであるから, これは容易ならざる問題で, 我々はこのような十分一般的な形では追及しないことにしよう. むしろ T_0 が対角化可能であるばかりでなく単純な (N 個の異なる固有値を有する) 場合に視野を限定しようと思う. すると $\mathfrak{S}[T]$ の連続性により, $\|A\|$ が十分に小さなときは, $T = T_0 + A$ についても同様のことが成り立ち, T の固有値は T_0

の近傍において N 個の一価連続函数 $\lambda_h[T], h=1,\ldots,N$ によって表現することができる．次の定理を示そう．

定理 5.16.　函数 $\lambda_h[T]$ は $T=T_0$ の近傍において全微分可能であるばかりでなく，正則である．

注意 5.17.　T の複素数値函数 $\mu[T]$ は，$A=T-T_0$ の絶対収束巾級数（テイラー級数）に展開できるとき，それは $T=T_0$ において正則であるという．すなわち

$$\mu\,[T_0+A]=\mu\,[T_0]+\mu^{(1)}\,[T_0,A]+\mu^{(2)}\,[T_0,A]+\cdots \tag{5.26}$$

ここで $\mu^{(n)}[T_0,A]$ は，A についての n 次形式，つまり

$$\mu^{(n)}\,[T_0,A]=\mu^{(n)}\,[T_0\,;\;A,\ldots,A] \tag{5.27}$$

である．ただし $\mu^{(n)}[T_0;A_1,\ldots,A_n]$ は，n 個の作用素 $A_1,\ldots,A_n$ に関する対称的な n-線形形式[12]である．容易にわかるように，$\mu[T]$ が $T=T_0$ において正則であるためには，$\mu[T_0+A]$ を A の N^2 個の行列要素の収束巾級数として表現できることが必要十分である．同様の方法で，作用素値函数 $R[T]\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ の $T\in\mathcal{B}(\mathsf{X})$ に対する正則な依存関係を定義することができる．

定理 5.16 の証明.　まず初めに，固有値 $\lambda_h[T]$ に対する一次元固有射影 $P_h[T]$ が T について正則であることを示そう．$R_0(\zeta)=(T_0-\zeta)^{-1}$ とおき，Γ_h を $\lambda_h[T_0]$ の周囲の小円とすると，(1.17) と同様，

$$P_h\,[T_0+A]=-\frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\Gamma_h}\sum_{n=0}^{\infty}\,R_0(\zeta)\big(-A\,R_0(\zeta)\big)^n\,d\zeta \tag{5.28}$$

を得る．$\|R_0(\zeta)\|^{-1}$ の $\zeta\in\Gamma_h$ に対する最小値を δ_h とすれば，$\|A\|<\delta_h$ に対して (5.28) の被積分函数に現われる級数は，$\zeta\in\Gamma_h$ について一様収束する．右辺は A についての巾級数になるから，$P_h[T]$ は $T=T_0$ において正則であることがわかる．

---

[12] 函数 $f(A_1,\ldots,A_n)$ は，$A_1,\ldots,A_n$ にいかなる置換を施しても値が不変のとき，**対称的**であるという．f が各変数 A_k について線形であるとき，それは n-線形であるという．

$P_h[T]$ は一次元であるから，

$$\lambda_h\big[T_0 + A\big] = \mathrm{tr}\,\big\{\big(T_0 + A\big)\,P_h\big[T_0 + A\big]\big\} \tag{5.29}$$

を得る．巾級数 (5.28) を代入すれば，$\lambda_h[T_0 + A]$ もまた A についての巾級数であることが示され，これが証明の目標であった．

§ 6. 対称作用素の摂動

1. 対称作用素の解析的摂動

これまでの諸節における多くの定理は，X をユニタリ空間 H とする場合には，単純化あるいは精密化を施すことが可能である．I-§6 の冒頭に述べた理由により，主として**対称作用素の摂動**を考察の対象とする．

$T, T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots$ をすべて対称的とし，(1.2) の形式を有する作用素 $T(\kappa)$ が与えられたものとしよう．すると**実数** κ について，和 $T(\kappa)$ もまた対称的となる．当然のことながら，複素平面の領域におけるすべての κ について，$T(\kappa)$ が対称的であることは期待できない．

より一般的に，実軸と交わる κ-平面のある領域 D_0 において正則で，しかも実数 κ については対称的な作用素値函数 $T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathrm{H})$ が与えられていると想定してみよう．すなわち

$$\text{実数 } \kappa \text{ については} \quad T(\kappa)^* = T(\kappa) \tag{6.1}$$

である．簡単化のために，この場合，族 $\{T(\kappa)\}$ が**対称的**であるということにする．また $T(\kappa)$ を摂動作用素とするとき，対称的摂動という言葉を用いることにする．$T(\overline{\kappa})^*$ は $\kappa \in \overline{\mathrm{D}}_0$（実軸に関する D_0 の鏡映）について正則で，実数 κ に対しては $T(\kappa)$ と合致する．ゆえに，正則函数の延長は一意的に定まるという性質から，$\kappa \in \mathrm{D}_0 \cap \overline{\mathrm{D}}_0$ に対しては $T(\overline{\kappa})^* = T(\kappa)$ が成り立つ．こうして，κ と $\overline{\kappa}$ が D_0 に属する限り，

$$T(\kappa)^* = T(\overline{\kappa}) \tag{6.2}$$

が成り立つ．この関係を援用して，κ および $\overline{\kappa}$ の一方が D_0 に含まれるが，他方は含まれないような任意の κ に $T(\kappa)$ を解析的に延長することができる．

かくして一般性を失うことなく，D_0 は実軸に対して対称的であると想定することが許されるのである．

対称作用素は正規であるから，次の定理が定理 1.10 から直接に導かれる．

定理 6.1. 正則な族 $T(\kappa)$ が対称的であるならば，固有値 $\lambda_h(\kappa)$ および固有射影 $P_h(\kappa)$ は実軸上で正則であり，それに対して固有巾零作用素 $D_h(\kappa)$ は恒等的にゼロとなる[1]．

問題 6.2. T および $T^{(1)}$ は対称的とし，$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)}$ とするならば，実数 κ に対する $T(\kappa)$ の最小固有値は，κ について区分的に正則な凹函数である［ヒント：I-(6.79) を応用せよ］．

注意 6.3. 定理6.1 を複数の変数が存在する場合に拡張することはできない．κ_1, κ_2 について正則で，しかも実数 κ_1, κ_2 について対称的な函数 $T(\kappa_1, \kappa_2)$ の固有値は，実数 κ_1, κ_2 について必ずしも正則ではない．これは例 5.12 から知られるとおりである．

注意 6.4. 実数 κ について，あるいはより一般に，D_0 における曲線上のすべての κ について $T(\kappa)$ が正規の場合，定理 6.1 と類似の定理が成り立つ．しかし (1.2) の係数 $T^{(n)}$ を用いてその条件を表現することは容易ではないので，そのような定理は殆ど実際上の応用価値をもたない．

§2 において与えられた摂動級数の計算もまた，対称的摂動の場合には単純化される．非摂動作用素 T は対称的であるから，T の任意の固有値 λ は半単純 $(D = 0)$ であり，§2.3 に述べた簡約過程が有効となる．$P(\kappa)$ は対称的で，$T(\kappa)$ と可換だから，(2.37) で与えられた作用素函数 $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ はやはり対称的である．**簡約過程は対称性を保存する**のである．したがって簡約化を無限に継続することができる．しかし固有値の分裂は有限回のステップののちに終結しなければならず，分裂の発現が停止する簡約過程の最終段階において，固有値および固有射影が最終的に (2.5) および (2.3) に対応する公式によって明示的に与えられるのである．この方法により，**簡約過程は対称的摂動の場合に固有値および固有射影を明示的に計算する完全な処方を与える**のである．

---

[1] しかし注意 1.11 を見よ．

注意 6.5. 与えられた段階において，固有値のさらなる分裂があるや否やを決定する一般的準則は，やはり存在しない．しかし注意 2.4 で与えられた可約性の原則は，とりわけ対称的摂動の場合に有益である．各段階における非摂動固有値は自動的に半単純であるから，当該の段階の非摂動固有射影が作用素の集合 $\{A\}$ に関して既約であるならば，これ以上の分裂は生じえない．

応用上，そのような集合 $\{A\}$ はその下で $T(\kappa)$ が不変となる**ユニタリ群** (unitary group) として与えられることが多い．考察の対象となっている固有射影は直交射影であるから，それが $\{A\}$ の下で既約になるためには，固有空間がすべてのユニタリ作用素 A の下で不変となる真の部分空間をもたないことが必要十分である．

注意 6.6. 非摂動作用素 T のみが対称的な場合でも，あるいは正規の場合でさえなお，一般理論はある程度まで簡単になる．たとえば，このとき T の対角化可能性により，すべての固有値 $\lambda_h(\kappa)$ は $\kappa = 0$ において連続微分可能となる（定理 2.3）．§3.5 において示したとおり，非摂動作用素 T が対称的あるいは正規ならば，収束半径の評価や誤差評価がやはり簡単になる．

注意 6.7. 評価 (3.52) は，対称的摂動という特別な場合においてさえ，その類の最良のものである．なぜなら例 3.10 はこの場合に該当するからである．

2. 固有ベクトルの正規直交系

正則かつ対称的な族 $T(\kappa)$ を考えてみよう．各実数 κ について，$T(\kappa)$ の固有ベクトルから成る，H の正規直交基底 $\{\varphi_n(\kappa)\}$ が存在する［I-(6.68) を見よ］．そこで**これらの正規直交固有ベクトル $\varphi_n(\kappa)$ を κ の正則な函数として選ぶことができるか**，という問が生ずる．実数 κ については，この問への答えは肯定的である．

固有値 $\lambda_h(\kappa)$ と固有射影 $P_h(\kappa)$ は実軸上で正則である（定理 6.1）から，(4.30) を満たす正則な変換函数 $U(\kappa)$ を構成するのに，§4.5 の方法を応用することができる．さらに**$U(\kappa)$ は実数 κ についてはユニタリである**．これを示すために，$U(\kappa)$ は 初期条件 $U(0) = 1$ の下における微分方程式 $U' = Q(\kappa)U$

の解とした構成されたものであることを想起しておこう．ただしここで，$Q(\kappa)$ は (4.33) によって与えられるものである．$P_h(\kappa)$ は対称的であるから，(6.2) と同様にして，$P_h(\kappa)^* = P_h(\overline{\kappa})$ であり，したがって $P_h'(\kappa)$ についても同様のことが成り立つ．ゆえに $Q(\kappa)$ は歪対称的，すなわち $Q(\overline{\kappa})^* = -Q(\kappa)$ なる関係が成り立ち，また $U(\overline{\kappa})^*$ は微分方程式

$$\frac{d}{d\kappa}\, U(\overline{\kappa})^* = -U(\overline{\kappa})^*\, Q(\kappa) \tag{6.3}$$

を満たす．他方，$V(\kappa) = U(\kappa)^{-1}$ は，初期条件 $V(0) = 1$ の下に，微分方程式 $V' = -VQ(\kappa)$ を満たす．解の一意性に鑑れば，

$$U(\overline{\kappa})^* = U(\kappa)^{-1} \tag{6.4}$$

が成り立たねばならない．これで実数 κ については，$U(\kappa)$ がユニタリであることが示されたのである．

これから，φ_{hk} が正規直交系基底を成す（T が対称的なので可能）ならば，(4.31) によって与えられた如き基底 $\varphi_{hk}(\kappa) = U(\kappa)\varphi_{hk}$ は，実数 κ については正規直交系となる．$T(\kappa)$ が対角化可能であることから，$\varphi_{hk}(\kappa)$ は $T(\kappa)$ の（一般化された意味にとどまらず狭義の）固有ベクトルとなっていることに注意すべきであろう．κ に滑らかに依存する，このような正規直交基底の存在は，対称作用素の解析的摂動論における最も顕著な成果のひとつである．ここで解析性が本質的であることは，以下において見るとおりである．

3.　連続性と微分可能性

さて H における作用素の非解析的摂動を考えてみよう．ここではパラメータ κ は実と仮定し，$T(\kappa) \in \mathcal{B}(\mathsf{H})$ が κ に連続に依存するものとする．すると $T(\kappa)$ の固有値は κ に連続に依存し，$T(\kappa)$ の重複固有値を表現する N 個の連続函数 $\mu_n(\kappa)$, $n = 1, \ldots, N$ を構成することができる（§5.2 を見よ）．この点について，$T(\kappa)$ を対称的とする特別な場合には，すべての $\mu_n(\kappa)$ が実数値で，したがって (5.4) の如き単純な番号づけも利用可能だということを除けば，新しいことは何もない．

固有値の微分可能性について，新しい結果が得られる．

定理 6.8[2]**.** $T(\kappa)$ は対称的で，κ の区間 I において連続微分可能であると仮定する．このとき $T(\kappa)$ の重複固有値を表現する，I 上で定義された N 個の連続微分可能な函数 $\mu_n(\kappa)$ が存在する．

証明. この定理の証明はかなり複雑である[3]．κ の値を固定して考えてみよう．一般性を失うことなく，$\kappa = 0$ としてよいであろう．λ を $T = T(0)$ の固有値のひとつとし，m はその重複度，P はそれに対応する固有射影とする．λ は半単純であるから，λ-群に属する $T(\kappa)$ の重複固有値の $\kappa = 0$ における導函数は，部分空間 $\mathsf{M} = P\mathsf{X}$ における $PT'(0)P$ の m 個の重複固有値によって与えられる（定理 5.4）．$\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p$ を M における $PT'(0)P$ の相異なる固有値とし，$P_1, \ldots, P_p$ をそれに対応する固有射影とする．$\mathsf{M}_j = P_j\mathsf{H}$ は M の部分空間である．上記の注意から，小さな $|\kappa| \neq 0$ に対して $T(\kappa)$ の λ-群を形づくる（重複）固有値は，p 個の部分群，すなわち $\lambda + \kappa\lambda'_j$-群，$j = 1, \ldots, p$ に分割されることが導かれる．これら部分群のおのおのは他の固有値から分離されているので，それに対する全射影 $P_j(\kappa)$ が定義される．同時に，$P_j(\kappa)$ は (5.14) によって与えられる作用素 $\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ の λ'_j-群に対する全射影になっている．しかしそこで示したとおり，$\widetilde{T}^{(1)}(\kappa)$ は $\kappa = 0$ の近傍において連続である（$\kappa \neq 0$ における連続性は自明）．それゆえ定理 5.1 により，$P_j(\kappa)$ は $\kappa = 0$ の近傍において連続であり，また仮定によって $T'(\kappa) = dT(\kappa)\,/\,d\kappa$ は連続であるから，

$$T_j(\kappa) = P_j(\kappa)\,T'(\kappa)\,P_j(\kappa) \tag{6.5}$$

についても同様である．

$T(\kappa)$ の $\lambda + \kappa\lambda'_j$-群は，一般に複数の相異なる固有値から成り，その個数は $\kappa = 0$ のいかなる近傍においても，κ について不連続に変化する可能性がある．$\lambda(\kappa_0)$ を $\kappa = \kappa_0 \neq 0$ に対するそのひとつとし，$Q(\kappa_0)$ を対応する固有射影とする．この $\lambda(\kappa_0)$ は，小さな $|\kappa - \kappa_0| \neq 0$ に対してさらに分裂する可能性があるが，その結果生ずるどの固有値の導函数も，部分空間 $Q(\kappa_0)\mathsf{H}$ に

---

[2] この定理は Rellich [8] による．一般的（非対称的）な摂動については，この定理の帰結は必ずしも正しくないことを想起せよ（注意 5.8 を見よ）．

[3] Rellich による原証明はもっと長い．

おける $Q(\kappa_0)T'(\kappa_0)Q(\kappa_0)$ の固有値とならねばならない（再び定理 5.4 による）．しかし $\lambda(\kappa_0)$ は $\lambda+\kappa\lambda'_j$-群に属するのであるから，$Q(\kappa_0)\mathsf{H}\subset P_j(\kappa_0)\mathsf{H}$ であり，したがって $Q(\kappa_0)T'(\kappa_0)Q(\kappa_0)=Q(\kappa_0)T_j(\kappa_0)Q(\kappa_0)$．ゆえに考察の対象になっている導函数は，作用素 $T_j(\kappa_0)$ の，$\mathsf{M}_j(\kappa_0)=P_j(\kappa_0)\mathsf{H}$ のある部分空間への直交射影（I-§6.10 の意味）の固有値である．$T_j(\kappa_0)$ は対称的であるから，定理 I-6.46 により，これらの固有値は部分空間 $\mathsf{M}_j(\kappa_0)$ における $T_j(\kappa_0)$ の最大固有値と最小固有値との間に位置することが導かれる．$\mathsf{M}_j(\kappa_o)$ における $P_jT'(0)P_j$ の固有値はすべて λ'_j に等しい．しかるに，上に示したとおり，$T_j(\kappa)$ は κ について連続であるから，$\kappa_0\to 0$ とするとき，$\mathsf{M}_j(\kappa_0)$ における $T_j(\kappa_0)$ の固有値は，この λ'_j に収束する．これから，$\kappa\to 0$ とするとき，$T(\kappa)$ の $\lambda+\kappa\lambda'_j$-群を形づくる固有値の導函数も λ'_j に収束しなければならないことが知られる．こうして定理 5.6 によって構成された固有値 $\mu_n(\kappa)$ の導函数が，所望のとおり連続であることが証明されたのである［上の証明中，定理 I-6.46 を応用するために $T(\kappa)$ の対称性が本質的に用いられた．この点を考慮すれば，一般的な場合に同種の結果が必ずしも成立しない事情が了解されるであろう］．

注意 6.9.　ひとたび解析性の仮定を除去してしまうと，対称的摂動の場合においてもなお，一般的な場合と同様，固有射影あるいは固有ベクトルの連続性は，固有値の連続性と比べてはるかに劣るものとなる．例 5.3 はこの点を示すのに十分であろう．この例での函数 $T(\kappa)$ は κ について無限回微分可能かつ対称的（$\boldsymbol{C}^2$ における通常の内積による）であるが，$\kappa=0$ において連続であり，またそこでゼロにならない $T(\kappa)$ の固有ベクトルを見出すことは不可能である．

注意 6.9 a.　一般に，固有値についてもなお，状況はあまり良好ではない．定理 6.8 は，より高次の微分可能性についてはこれに対応する結果が存在しないという意味で最良なものである．**$\boldsymbol{T(\kappa)}$ が $\boldsymbol{\kappa}$ について $\boldsymbol{C^\infty}$-級の場合でさえ，$\boldsymbol{\mu_n(\kappa)}$ は必ずしも $\boldsymbol{C^2}$-級ではない．** α,β は正の定数とし，$\kappa\neq 0$ に対しては

$$T(\kappa)=\begin{pmatrix} e^{-(\alpha+\beta)/|\kappa|} & e^{-\beta/|\kappa|}\ \sin(1/|\kappa|) \\ e^{-\beta/|\kappa|}\ \sin(1/|\kappa|) & -e^{-(\alpha+\beta)/|\kappa|} \end{pmatrix}$$

と定義し，また $T(0)=0$ とすれば，これが反例になっている[4]．$T(\kappa)$ は対称的で，しかも $\kappa \in \mathrm{R}$ について C^∞-級である．$\kappa \neq 0$ に対して $T(\kappa)$ の固有値は相異なり，$\kappa \neq 0$ に対しては

$$\mu_\pm(\kappa) = \pm e^{-\beta/|\kappa|}\left[e^{-2\alpha/|\kappa|} + \sin^2(1/|\kappa|)\right]^{1/2},$$

また $\mu_\pm(0)=0$ で与えられる．$\kappa \neq 0$ については，明らかに $\mu_\pm(\kappa)$ は C^∞-級であり，また $\kappa = 0$ の近傍において C^1-級であることは容易に確かめることができる（こうして定理 6.8 が確かめられる）．しかし $\kappa = 1/n\pi (n=1,2,\ldots)$ において評価される $\mu_\pm(\kappa)$ の第二次導函数は，$n \to \infty$ とするとき，$\pm(n\pi)^4 e^{(\alpha-\beta)n\pi} + O(e^{-n\pi\beta})$ である．ゆえに $\alpha \geqq \beta$ とすれば，第二次導函数は $\kappa = 0$ において不連続となる．

4. 対称作用素の函数としての固有値

§5.8 と同様，対称作用素 T の固有値を，T 自身の函数とみなすことができる．先の場合と同じように，またそこで説明された意味において，固有値は T の連続函数である．しかしいまや，重複固有値を機に応じて小さなものから逐次ならべることにより，**順序づけられた**N 個の数の組を形づくるものとみなすことができるから，状況ははるかに単純になるのである．

$$\mu_1[T] \leqq \mu_2[T] \leqq \cdots \leqq \mu_N[T]. \tag{6.6}$$

これは T が H におけるすべての対称作用素にわたって変化するとき，T の N 個の実数値函数を定義する．そして固有値の連続性は，これらの函数の連続性によって表現されるのである（つまり $T' \to T$ ならば $\mu_n[T'] \to \mu_n[T]$）．

固有値の番号づけ (6.6) はきわめて単純であるが，それがいつでも便利かといえばそうではない．なぜなら，$\mu_n[T]$ は偏微分の可能性さえ，必ずしも満たさないからである．たとえば，T, T' を対称的，κ を実数とし，$\mu_n[T+\kappa T']$ を κ の函数として考えると，この点が了解されるであろう．$T+\kappa T'$ の固有値は κ の正則な函数として表現することができる（定理 6.1）．これらの函数のグラフは，κ のいくつかの値（例外点）において互いに交叉する可能性がある．そのような**交叉**(crossing) が起こるならば，$\mu_n[T+\kappa T']$ のグラフはある滑らかな曲線から他の滑らかな曲線へと飛躍し，交叉点において角

---

[4] Wasow[1] 参照.

をもつことになる．換言すれば，$\mu_n[T+\kappa T']$ は連続であるが，必ずしも微分可能ではない．いずれにせよ，κ のいかなる有限区間にも交叉点（例外点）は有限個しかないのであるから，$\mu_n[T+\kappa T']$ は **区分的に正則** である．

こうして，T の重複固有値を，順序づけを施されていない N 個の数の組 $\mathfrak{S}[T]$ の元とみなす旧来の観点に立ち戻るのが，時としてより便利である．すると前項の結果から，**$\mathfrak{S}[T]$ が連続的に偏微分可能**であることが導かれる．しかし $\mathfrak{S}[T]$ は N 個の相異なる固有値をもつ T においてのみ全微分可能である（再び例 5.12）．だがそのような T の近傍では，函数 (6.6) は単に微分可能であるばかりでなく，T について正則なのである．

5.　応用：リドスキーの定理

摂動論の主たる関心事は，関連する諸量のわずかな変化である．ここで作用素が**有限の** (finite) 変化に服する場合の固有値の変化に関する若干の問題を考えてみよう[5]．より一層特定化していえば，ふたつの対称作用素 A, B の固有値間の関係を，それらの差 $C=B-A$ を用いて評価する問題を考えるのである．

A, B, C の重複固有値をそれぞれ (6.6) のように小さなものから順に並べて，$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, n=1,\ldots,N$ と書き表わす．

$$T(\kappa)=A+\kappa C,\quad 0\leqq\kappa\leqq 1 \tag{6.7}$$

とし，したがって $T(0)=A, T(1)=B$ とする．また $T(\kappa)$ の重複固有値を小さなものから順に並べたものを $\mu_n(\kappa)$ と表記する．前項で示したように，$\mu_n(\kappa)$ は連続かつ区分的に正則であり，$\mu_n(0)=\alpha_n, \mu_n(1)=\beta_n$ である．区間 $0\leqq\kappa\leqq 1$ においては，$\mu_n(\kappa)$ の導函数が不連続となる可能性のある例外点の数は有限個にすぎない．

第2項の議論に従い，各 κ に対して，$T(\kappa)$ の固有ベクトルから成る完備な正規直交系 $\{\varphi_n(\kappa)\}$：

$$\bigl(T(\kappa)-\mu_n(\kappa)\bigr)\,\varphi_n(\kappa)=0\,,\quad n=1,\ldots,N \tag{6.8}$$

[5] 固有値および固有ベクトルの有限変化に関するより一般的な研究としては，Davis [1,3]，Davis and Kahan [1] を見よ．

を，$\varphi_n(\kappa)$ が区分的に正則となるように選ぶことができる．一般に，それらは例外点においては不連続である．これは固有値 $\mu_n(\kappa)$ のかなり不自然な番号づけに起因する．κ が例外点でない場合は，(6.8) を微分して

$$(6.9)\qquad \bigl(C-\mu_n'(\kappa)\bigr)\,\varphi_n(\kappa)+\bigl(T(\kappa)-\mu_n(\kappa)\bigr)\,\varphi_n'(\kappa)=0$$

を得る．(6.9) と $\varphi_n(\kappa)$ との内積をとり，$T(\kappa)$ の対称性，(6.8) および正規化 $\|\varphi_n(\kappa)\|=1$ を利用すると，

$$(6.10)\qquad \mu_n'(\kappa)=\bigl(C\,\varphi_n(\kappa),\varphi_n(\kappa)\bigr)$$

が導かれる．$\mu_n(\kappa)$ は連続で，また $\varphi_n(\kappa)$ は区分的に連続であるから，(6.10) を積分して

$$(6.11)\qquad \beta_n-\alpha_n=\mu_n(1)-\mu_n(0)=\int_0^1\bigl(C\,\varphi_n(\kappa),\varphi_n(\kappa)\bigr)\,d\,\kappa$$

が得られる．

$\{x_j\}$ を C の固有ベクトルから成る正規直交基底とする．

$$(6.12)\qquad C\,x_n=\gamma_n\,x_n\,,\quad n=1,\ldots,N\,.$$

すると

$$\begin{aligned}\bigl(C\,\varphi_n(\kappa),\varphi_n(\kappa)\bigr)&=\sum_j\,\bigl(C\,\varphi_n(\kappa),x_j\bigr)\bigl(x_j,\varphi_n(\kappa)\bigr)\\&=\sum_j\,\gamma_j\,\bigl|\,(\varphi_n(\kappa),x_j)\bigr|^2\end{aligned}$$

が成り立ち，(6.11) は

$$(6.13)\qquad \beta_n-\alpha_n=\sum\,\sigma_{nj}\,\gamma_j\,,$$

$$(6.14)\qquad \sigma_{nj}=\int_0^1\,\bigl|\bigl(\varphi_n(\kappa),x_j\bigr)\bigr|^2\,d\,\kappa$$

となる．$\{\varphi_n(\kappa)\}$ および $\{x_j\}$ の正規直交性から，

$$(6.15)\qquad \sum_j\,\sigma_{nj}=1\,,\quad \sum_n\,\sigma_{nj}=1\,,\quad \sigma_{nj}\geqq 0$$

が導かれる.

さて, (6.15) の性質をもつ正方行列 (σ_{nj}) は, すべての置換行列の集合の凸包に含まれることが, 行列論ではよく知られている[6]. かくして (6.13) からリドスキー [1] に負う次の定理が導かれる.

定理 6.10. $A, B, C, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ は上記のとおりとする. N 次元の数ベクトル $(\beta_1-\alpha_1,\ldots,\beta_N-\alpha_N)$ は, $(\gamma_1,\ldots,\gamma_N)$ の元にあらゆる可能な置換を施して得られるベクトルの集合の凸包に含まれる.

(6.13) のいまひとつの帰結は次のようである.

定理 6.11. 実変数 t の任意の凸函数 $\Phi(t)$ に対して, 次の不等式が成り立つ.

$$\sum_n \Phi(\beta_n-\alpha_n) \leqq \sum_n \Phi(\gamma_n). \tag{6.16}$$

この証明は,

$$\Phi(\beta_n-\alpha_n)=\Phi\left(\sum_j \sigma_{nj}\,\gamma_j\right) \leqq \sum_j \sigma_{nj}\,\Phi(\gamma_j)$$

なので, (6.13), (6.15) および Φ の凸性から容易に導かれる.

例 6.12. $\Phi(t)=|t|^p,\ p\geqq 1$ とする. このとき (6.16) から[7],

$$\sum_n \left|\beta_n-\alpha_n\right|^p \leqq \sum_n \left|\gamma_n\right|^p, \quad p \geqq 1. \tag{6.17}$$

(6.17) の p 乗根をとり, $p\to\infty$ とすれば

$$\max_n \left|\beta_n-\alpha_n\right| \leqq \max_n \left|\gamma_n\right| = \|C\| \tag{6.18}$$

---

[6] Birkhoff [1], Mirsky [1] を見よ. 置換行列 (σ_{jk}) は, $\{1,2,\ldots,n\}$ の置換 $j\to\pi(j)$ と次のような関係で対応している. つまり $k=\pi(j)$ ならば $\sigma_{jk}=1$, またそれ以外の場合は $\sigma_{jk}=0$.

[7] 右辺を $\operatorname{tr} C^*C$ で置き換え, $\{\alpha_n\}$ の適当な順序づけを選択するならば, A, B が正規であることを仮定するだけのより一般的な場合において, $p=2$ として (6.17) が成り立つ. これは Hoffman and Wielandt [1] によって示された. A, B が正規であっても $C=B-A$ は正規になるとは限らないことに注意しよう.

が得られる.

6. 対称作用素の非対称的摂動

(6.18) によれば，対称作用素 A が対称作用素 C による摂動を受けるとき，A の固有値の変化は $\|C\|$ 以下である（固有値には適当な順序づけを施すことを仮定する）ことが知られる.

非対称的な摂動 C についても，$\|C\|$ が十分に小さく，また A が対称的である限りにおいて，同様の結果が成り立つ．実際，A の固有値 λ の変化の大きさは，λ の孤立度を r とし，$\|C\| < r/2$ とすれば，$\|C\|$ 以下である（定理 3.9）．λ は単純であるとは限らないことに注意しよう．λ の重複度を m とすれば，λ からの距離 $r/2$ 以内に，総重複度が m となる，$A+C$ の複数の固有値が存在する．A のいくつかの固有値から成る群を同時に考察する場合にもなお，この群が A のスペクトルの残余から r の距離を有するならば，同じことが成り立つ.

A の固有値の間隔と比べて $\|C\|$ が大きい場合には，そのような結果は必ずしも成り立たない．その結果，$\mathfrak{S}(A)$ と $\mathfrak{S}(A+C)$ との距離は，$\|C\|$ と比べていくらでも大きくなる可能性がある．次の例[8]はその状況を示すものである.

例 6.13. $A = (a_{jk})$ を $N \times N$ 型の対称行列で，$j \neq k$ に対しては $a_{jk} = |j-k|^{-1}$，また $a_{jj} = 0$ $(j,k = 1,\ldots,N)$ とする．$C = (c_{jk})$ は歪対称行列で，$j \neq k$ に対しては $c_{jk} = (j-k)^{-1}$，また $c_{jj} = 0$ とする．こうすると $A+C$ は左下の部分にゼロでない値が現われる三角行列で，対角要素はゼロである．したがってそれは巾零で，$\Sigma(A+C) = \{0\}$．そこで任意の $N = 1,2,\ldots$ に対して $\|C\| \leqq \pi$ であるが，他方，$\|A\|$ は N とともに対数的に増大し，したがって $\Sigma(A)$ は $\log N$ に比例する直径を有することを示すことができる．このように，対称作用素の任意に大きな直径をもつスペクトルは，固定的な大きさの摂動によって，一点に転換することができるのである.

---

[8] Kahan[1,2] を見よ.

§ 7.　（本質的）非負行列の摂動

1.　主固有値の単調性

本節では，I-§7 において導入された（本質的に）非負の行列の摂動に関する，いくつかの基本的結果について考究する．ここで問題とされる正値性は，対称作用素の正値定符号性とは異ったものであることを思い出しておこう．

行列 T が本質的に非負であることは，T のすべての非対角要素が非負であることと定義される（I-§7.3）．$\mathsf{X} = \mathsf{C}^N$ とすれば，そのような行列の全体は $\mathcal{B}(\mathsf{X})$ の閉部分集合 $\mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ を成す．各 $T \in \mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ について，主固有値 $\lambda[T]$ が定義される（定理 I-7.5）．$\lambda[T]$ は実で，非負の固有ベクトルをもち，T の他のいかなる固有値の実部よりも厳密に大きな値をもつ．T が既約であるならば，$\lambda[T]$ は単純で，正の固有ベクトルを有する（定理 I-7.10）．簡単化のために，すべての既約で本質的に非負の行列の集合を $\mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ と書き表わす．

補題 7.1.　$\mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ は $\mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ の相対位相について開かつ稠密である．$T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ かつ $A \in \mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ ならば，$T + A \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ である．

証明.　定理 I-7.7 および既約性の定義により，$T \in \mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ が $\mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ に属するためには，e^T が正であることが必要十分である．この性質は，T がわずかに変化したときにも保存される．それゆえ $\mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ は $\mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ における開集合である［この議論は $T \in \mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ という仮定の下でのみ成り立つことに注意］．また T が本質的に正ならば，$T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ である．しかし本質的に正な行列の集合は，明らかに $\mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ において稠密である．したがって $\mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ は $\mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ において稠密である．補題の最後の命題は I-§7.4（既約性の定義につづく注意）において証明された．

定理 7.2.　$\lambda[T]$ は，$T \in \mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ の単調非減少函数である．より厳密にいえば，$T, S \in \mathcal{G}_+(\mathsf{X})$ で $S - T$ が非負ならば，$\lambda[T] \leqq \lambda[S]$．とくに $T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ ならば，$S = T$ の場合に限って等号が成り立つ．

証明.　$A = S - T$ とおく．A は非負であるがゼロではないと仮定してよい．

まず $T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ とし，族 $T(\kappa) = T + \kappa A, 0 \leqq \kappa \leqq 1$ を考える．すると補題 7.1 により $T(\kappa) \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ であり，したがって $\lambda(\kappa) = \lambda[T(\kappa)]$ は $T(\kappa)$ の単純固有値である．解析的摂動論（§1）により，$\lambda(\kappa)$ は区間 $[0,1]$ の複素近傍において κ について正則であることが導かれ，また $\lambda'(0) = (A\varphi, \psi) > 0$ を得る．ここで $\varphi \gg 0$ および $\psi \gg 0$ は，それぞれ T および T^* の，固有値 $\lambda(0) = \lambda[T] = \lambda[T^*]$ に対する固有ベクトルで，$(\varphi, \psi) = 1$ となるように正規化されたものとする（(2.36) を見よ）．同様に $\kappa = 0$ は特別な値ではないから，$0 \leqq \kappa \leqq 1$ に対して $\lambda'(\kappa) > 0$ を得る．こうして $\lambda[S] = \lambda(1) > \lambda(0) = \lambda[T]$ であり，$T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ に対して定理が証明される．一般の場合の $T \in \mathcal{G}_{+}(\mathsf{X})$ は，T を既約行列で近似することにより（補題 7.1 を見よ），連続性を用いて処理すればよい．

例 7.3. (a) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda[T] = \lambda[S] = 0$. T は可約.

(b) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda[T] = 1$, $\lambda[S] = 2^{1/2}$, T は既約.

2. 主固有値の凸性

$\lambda[T]$ は限定された意味において凸性を有する．すなわちそれは T の対角要素の凸函数である．同じことであるが，この性質は次の形で述べることができる．

定理 7.4.[1] $T \in \mathcal{G}_{+}(\mathsf{X})$ とし，A は実対角行列とする．このとき，$-\infty < \kappa < \infty$ に対して $T + \kappa A \in \mathcal{G}_{+}(\mathsf{X})$ であり，また $\lambda[T + \kappa A]$ は κ の凸函数である．とくに $T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ で，A が単位行列のスカラー倍ではないならば，任意の区間において，$\lambda[T + \kappa A]$ は κ の狭義の凸函数である．

---

[1] この定理は Cohen によって，いくつかの方法で証明された．格別に単純な証明が Cohen [1] に見出される．Friedland [1] をも見よ．

注意 7.5.　$\lambda[T]$ のこの限定された意味での凸性は，対称作用素 H の最大固有値 $\lambda_N[H]$ の凸性の類似である．H および K が対称的ならば，$\lambda_N[H+\kappa K]$ は実パラメータ κ の凸函数である［問題 6.2 および I-(6.79) を見よ．そこでは結果が最小固有値 $\lambda_1[H]$ について述べられているが，これに対しては凸性ではなく凹性が成り立つのである］．

例 7.6.　(a) 一般に，非対角要素が変化するときには，$\lambda[T]$ にはいかなる凸性も保証されない．反例をあげれば，

$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda\left[T(\kappa)\right] = 1 + \kappa^{1/2}, \quad \kappa \geqq 0 .$$

$1 + \kappa^{1/2}$ は $\kappa \geqq 0$ についての凸函数ではない．

(b) 狭義の凸性については，$T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ であることが本質的である．反例をあげれば，

$$T(\kappa) = \begin{pmatrix} \kappa & 1 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}, \quad \lambda\left[T(\kappa)\right] = |\kappa|.$$

$T(\kappa)$ は可約．$|\kappa|$ は κ のいかなる区間においても，狭義の凸函数ではない．

定理 7.4 の証明.　補題 7.1 に鑑れば，定理の後半を証明すれば十分である．(定理 7.2 の証明を参照.）そこで $T \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$，したがってすべての κ に対して $T + \kappa A \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ をも仮定しよう（補題 7.1 を見よ）．$\kappa = 0$ は特別の値ではないから，$\lambda(\kappa) = \lambda[T + \kappa A]$ の凸性を証明するためには，$\lambda''(0) \geqq 0$ を示せば十分である．

この目的のために，摂動級数 (2.21) を用いる．ただしそうする前に，作用素 T を便利な形に転換しておく．$\lambda = \lambda(0) = \lambda[T]$ とすると，定理 I-7.12 により，$F^{-1}TF - \lambda$ が消散的となるような，正の対角要素をもつ対角行列 F が存在する（ここで $\mathsf{X} = \mathsf{C}^N$ はユニタリ空間とみなされており，$\mathsf{X}^* = \mathsf{X}$ である）．

$$T_0 = F^{-1}\,T\,F, \quad A_0 = F^{-1}\,A\,F \tag{7.1}$$

とおく．すると $T_0 \in \mathcal{G}_{++}(\mathsf{X})$ であり（なぜなら $e^{T_0} = F^{-1}e^T F$ は e^T とともに正），A_0 は対角行列である．さらに相似変換は固有値を変えないので，

$$\lambda(\kappa) = \lambda\left[T + \kappa\,A\right] = \lambda\left[F^{-1}(T + \kappa\,A)\,F\right] = \lambda\left[T_0 + \kappa\,A_0\right]. \tag{7.2}$$

したがって $\lambda''(0) \geqq 0$ を証明するには，$T = T_0$, $A = A_0$ を仮定してよい．

すると $T - \lambda$ は消散的である．定理 I-6.49 から，T の固有値 λ は半単純（既述）で，対応する固有射影 P は自己随伴，そして被約レゾルベント S は消散的であることが導かれる．このように

$$\text{(7.3)} \qquad \mathrm{Re\,tr}\,(A\,S\,A\,P) = \mathrm{Re}\,(S\,A\,\varphi, A\,\varphi) \leqq 0\,.$$

ここで $P = (\quad, \varphi)\varphi$ で，$\varphi \gg 0$ は T の主固有値 λ に対する正規化された固有ベクトルである．公式 (2.33) によれば，$\widehat{\lambda}^{(2)} = 2\lambda''(0)$ であり，したがって $\lambda''(0) = \mathrm{Re}\,\lambda''(0) \geqq 0$.

こうして $\lambda(\kappa)$ が κ について凸であることが示された．それが狭義の凸性を満たすことを証明するには，$-\infty < \kappa < \infty$ において $\lambda(\kappa)$ は実解析的であることがわかっているので，それが線形でないことを示せば十分である（ここで $\lambda(\kappa)$ が $T + \kappa A$ の単純固有値であることが重要である）．この目標のために，α' および α'' をそれぞれ，A の最小および最大の固有値とする．$T + \kappa A = \kappa(A + \kappa^{-1}T)$ であるから，$\kappa \to \pm\infty$ とするとき，$A + \kappa^{-1}T$ の固有値の連続性により，

$$\text{(7.4)} \qquad \lim_{\kappa\to+\infty} \kappa^{-1}\,\lambda\,[T + \kappa\,A] = \alpha'', \qquad \lim_{\kappa\to-\infty} \kappa^{-1}\,\lambda\,[T + \kappa\,A] = \alpha'$$

を得る（§ 5.1 を見よ）．換言すれば，$\kappa \to +\infty$ のとき，$\lambda[T + \kappa A]$ は漸近的に $\alpha''\kappa$ に等しく，また $\kappa \to -\infty$ のときには，漸近的に $\alpha'\kappa$ に等しくなる．A が単位行列のスカラー倍でないならば，$\alpha' < \alpha''$ であるから，解析関数 $\lambda[T + \kappa A]$ は κ について線形ではありえない．

参考文献

Akhiezer, N. I. and I. M. Glazman:

【1】 Theory of linear operators in Hilbert space (English translation), Vol. I and II, New York: Frederick Ungar 1961 and 1963.

Bart, H.:

[1] Holomorphic relative inverses of operator valued functions. Math. Ann. **208**, 179-194 (1974).

Baumgärtel, H.:

【1】 Endlichdimensionale analytische Störungstheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1972.

[1] Zur Störungstheorie beschränkter linearer Operatoren eines Banachschen Raumes. Math. Nachr. **26**, 361-379 (1964).

[4] Analytische Störung isolierter Eigenwerte endlicher algebraischer Viefachheit von nichtselbstadjungierten Operatoren. Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **10**, 250-257 (1968).

[5] Jordansche Normalform holomorpher Matrizen. Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **11**, 23-24 (1969).

[6] Ein Reduktionsprozeβ für analytishe Störungen nichthalbeinfacher Eigenwerte. Monatst. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **11**, 81-89 (1969).

[7] Zur Abschätzung der Konvergenzradien von Störungsreihen. Monatsb. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin **11**, 556-572 (1973).

Birkhoff, G.:

[1] Three observations on linear algebra. Univ. Nac. Tucumán Rev. Ser. A. **5**, 147-151 (1946).

Bloch, C.:

[1] Sur la theórie des perturbations des états liés. Nuclear Phys. **6**, 329-347 (1958).

Burckel, R. B.:

【1】 An introduction to classical complex analysis. Vol. 1. Basel and Sttutgart: Birkhäuser 1979.

Butler, J. B. Jr.:
[1] Perturbation series for eigenvalues of analytic non-symmetric operators. Arch. Math. **10**, 21-27 (1959)
Cohen, J. E.:
[1] Convexity of the dominant eigenvalue of an essentially non-negative matrix. Proc. Amer. Math. Soc. **81**, 657-658 (1981).
Courant, R. and D. Hilbert:
【1】 Methods of mathematical physics*, I. New York: Interscience 1953.
Davis, C.:
[1] The rotation of eigenvectors by a perturbation, J. Math. Anal. Appl. **6**, 159-173 (1963).
[2] Separation of two linear subspaces. Acta Sci. Math. Szeged. **19**, 172-187 (1958).
[3] The rotation of eigenvectors by a perturbation, II. J. Math. Anal. Appl. **11**, 20-27 (1965).
Davis, C. and W. M. Kahan:
[1] The rotation of eigenvectors by a perturbation, III. SIAM J. Numer. Anal. **7**, 1-46 (1970).
Del Pasqua, D.:
[1] Su una nozioni di varietà lineari disgiunte di uno spazio di Banach. Rendi. di Mat. **13**, 1-17 (1955).
Doležal, V.:
[1] The existence of a continuous basis of a certain linear subspace of E_r which depends on a parameter. Casopis Pest. Mat. **89**, 466-469 (1964).
Dunford, N. and J. T. Schwartz:
【1】 Linear operators, Part I: General theory; Part II: Spectral theory; Part III: Spectral operators. New York: Interscience 1958, 1963, 1971.
Eggleston, H. G.:
【1】 Convexity. Cambridge: University Press 1963.
Friedland, S.:
[1] Convex spectral functions, Linear and Multilinear Algebra **9**, 299-316 (1981).
Friedrichs, K. O.:
【1】 Perturbation of spectra in Hilbert space. Providence: Amer. Math. Soc. 1965.
[2] Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators. Math. Ann. **115**, 249-272 (1938).
Gantmacher, F. R.:
【1】 The theory of matrices (English translation)Vol. I, II. New York: Chelsea 1959.
Garrido, L. M.:
[1] Generalized adiabatic invartiance. J. Mathematical Phys. **5**, 355-362 (1964).

* （訳者注）日本語訳は,『数理物理学の方法 全4巻』（齋藤利弥監訳, 東京図書）.

Garrido, L. M. and F. J. Sancho:
[1] Degree of approximate validity of the adiabatic invariance in quantum mechanics. Physica **28**. 553-560 (1962).
Gelfand, I. M.:
[1] Lectures on linear algebra (English translation). New York: Interscience 1961.
Gohberg, I. C. and M. G. Krein:
[1] The basic proportions on defect numbers, root numbers, and indices of linear operators. Uspehi Mat. Nauk 12, **2** (74), 43-118 (1957); Amer. Math. Soc. Transrations Ser. 2, **13**, 185-264 (1960).
Gramsch, B.:
[2] Inversion von Fredholmfunktionen bei stetiger und holomorpher Abhängigkeit von Parametern. Math. Ann. **214**, 95-147 (1975).
Halmos, P. R.:
[2] Finite-dimensional vector spaces, 2nd Ed. Princeton: D. van Nostrand 1958.
Hardy, G. H. , J. E. Littlewood and G. Pólya:
[1] Inequalities. 2nd Ed. Cambridge: University Press 1952.
Helmer, O.:
[1] Divisibility properties of integral functions. Duke Math. J. **6**, 345-356 (1940).
Hille, E. and R. S. Phillips:
[1] Functional analysis and semi-groups. Revised ed. Providence: Amer. Math. Soc. 1957.
Hoffman, K. and R. Kunze:
[1] Linear algebra. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1961.
Hoffman, A. J. and H. W. Wielandt:
[1] The variation of the spectrum of a normal matrix. Duke Math. J. **20**, 37-39 (1953).
Kahan, W.:
[1] Every $n \times n$ matrix Z with real spectrum satisfies $\|Z - Z^*\| \leq \|Z + Z^*\|$ $(\log_2 n + 0.038)$. Proc. Amer. Math. Soc. **39**, 235-241 (1973).
[2] Spectra of nearly Hermitian matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **48**, 11-17 (1975).
Kato, T.:
[1] On the convergence of the perturbation method, I, II. Progr. Theor. Phys. **4**, 514-523 (1949); **5**, 95-101; 207-212 (1950).
[2] On the adiabatic theorem of quantum mechanics. J. Phys. Soc. Japan **5**, 435-439 (1950).
[3] On the convergence of the perturbation method. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **6**, 145-226 (1951).
[6] On the perturbation theory of closed linear operators. J. Math. Soc. Japan **4**, 323-337 (1952).
[9] Notes on projections and perturbation theory. Technical Report No. 9, Univ. Calif. 1955.

[12] Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operaters. J. Analyse Math. **6**, 261-322 (1958).
[13] Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition. Numer. Math. **2**, 22-29 (1960).

Kemble, E. C.,
【1】 The fundamental principles of quantum mechanics. New York: Dover 1958.

Knopp, K.:
【1, 2】 Theory of functions (English transration). Parts I and II. New York: Dover 1945 and 1947.

Lidskii, V. B.:
[1] The proper values of the sum and product of symmetric matrices. Dokl. Akad. Nauk SSSR **75**, 769-772 (1950)(Russian).

Livšic, B. L.:
[1] Perturbation theory for a simple structure operator. Dokl. Akad. Nauk SSSR **133**, 800-803 (1960)(Russian).

Lorch, E. R.:
【1】 Spectral theory. New York: Oxford University Press 1962.

Mirsky, L.:
[1] Proofs of two theorems on doubly-stochastic matrices. Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 371-374 (1958).

Motskin, T. S. and O. Taussky:
[1] Pairs of matrices with property L. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 108-114 (1952).
[2] Pairs of matrices with property L. II. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 387-401 (1955).

Nomizu, K, :
[1] Characteristic roots and vectors of a differentiable family of symmetric matrices. Linear and Multilinear Algebra **1**, 159-162 (1973).

Parlett, B. N.:
【1】 The symmetric eigenvalue problem. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1980.

Phillips, R. S.:
[1] Perturbation theory for semi-groups of linear operators. Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 199-221 (1954).

Pólya, G. and G. Szegö:
【1】 Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I. **3**. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.

Porath, G.:
[1] Störungstheorie der isolierten Eigenwerte für abgeschlossene lineare Transformationen im Banachschen Raum. Math. Nachr. **20**, 175-230 (1959).
[2] Störungstheorie für lineare Transformationen im Banachschen Raum. Wiss. Z. Tech. Hochsch. Dresden **9**, 1121-1125 (1959/60).

Rayleigh, Lord:
【1】 The theory of sound. Vol. I. London: 1927.
Reed, M. and B. Simon:
【2】 Methods of modern methematical physics. Vol. IV. New York-London: Academic Press 1978.
Rellich, F.:
[1] Störungstheorie der Spectralzerlegung, I. Math. Ann. **113**, 600-619 (1937).
[2] Störungstheorie der Spectralzerlegung, II. Math. Ann. **113**, 677-685 (1937).
[3] Störungstheorie der Spectralzerlegung, III. Math. Ann. **116**, 555-570 (1939).
[4] Störungstheorie der Spectralzerlegung, VI. Math. Ann. **117**, 356-382 (1940).
[5] Störungstheorie der Spectralzerlegung, V. Math. Ann. **118**, 462-484 (1942).
[6] Störungstheorie der Spectralzerlegung. Proc. Intern. Congress Math. 1950, **I**, 606-613.
[7] New results in the perturbation theory of eigenvalue problems. Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser. **29**, 95-99 (1953).
[8] Perturbation theory of eigenvalue problems. Lecture Notes, New York Univ. 1953.
Riesz, F. and B. Sz.-Nagy:
【1】 Functional analysis (English translation). New York: Frederick Ungar 1955.
Rosenbloom, P.:
[1] Perturbation of linear operators in Banach spaces. Arch. Math. **6**, 89-101 (1955).
Royden, H. L.:
【1】 Real analysis. New York: Macmillan 1963.
Saphar, P:
[1] Contribution a l'étude des applications linéaires dans un espace de Banach, Bull. Soc. Math. France **92**, 363-384 (1964).
Schaefer, H. H.:
【1】 Banach lattices and positive operators. New York-Heidelberg-Berlin: Springer 1974.
Schäfke, F. W.:
[3] Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern. Math. Nachr. **6**, 109-124 (1951).
[4] Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. Z. angew. Math. Mach. **33**, 255-259 (1953).
[5] Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **133**, 219-234 (1957).
Schiff, L. I.:
【1】 Quantum mechanics*. New York-Toronto-London: McGraw-Hill 1955.
Schröder, J.:
[1] Fehlerabscätzungen zur Störungstrechnung bei linearen Eigenwertproblemen

* （訳者注）日本語訳は,『量子力学 上・下』（井上健訳, 吉岡書店）.

mit Operaroren eines Hilbertschen Raumes. Math. Nachr. **10**, 113-128 (1953).
[2] Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. **34**, 140-149 (1954).
[3] Störungstrechnung bei Eigenwert- und Verzweigungsaufgaben. Arch. Rational Mech. Anal. **1**, 436-48 (1958).

Schrödinger, E.:
【1】 Collected papers on wave mechanics. London and Glasgow: 1928.
[1] Quantisierung als Eigenwertproblem. (Dritte Mitteilung: Störungstheorie, mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien.) Ann. Physik **80**, 437-490 (1926).

Silverman, L. M. and R. S. Bucy:
[1] Generalizations of a theorem of Doiežal. Math. Systems Theory **4**, 334-339 (1970).

Šmul'yan, Yu. L.:
[1] Completely continuous perturbation of operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR **101**, 35-38 (1955)(Russian).

Stone, M. H.:
【1】 Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. Providence: Amer. Math. Soc. 1932.

Sz.-Nagy, B.:
[1] Perturbations des transformations autoadjointes dans I'espace de Hilbert. Comment. Math. Helv. **19**, 347-366 (1946/47).
[2] Perturbations des transformations linéaires fermées. Acta Sci. Math. Szeged. **14**, 125-137 (1951).

Titchmarsh, E. C.:
[1] Some theorems on perturbation theory. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **200**, 34-46 (1949).
[2] Some theorems on perturbation theory. II. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **201**, 473-479 (1950).

Višik, M. I. and L. A. Lyusternik:
[1] Perturbation of eigenvalues and eigen-elements for some non-selfadjoint operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR **130**, 251-253 (1960)(Russian).
[3] Solution of some perturbation problems in the case of matrices and self-adjoint or non-self-adjoint differential equations. I. Uspehi Mat. Nauk **15**, **3** (93), 3-80 (1960); Russian Math. Surveys **15**, no.3, 1-73 (1960).

Wasow, W.:
[1] On the spectrum of Hermitian matrix-valued functions. Resultate der Math. **2**, 206-214 (1979).

Weiss, L. and P. L. Falb:
[1] Doležal's theorem, linear algebra with continuously parametrized elements, and time-varying systems. Math. Systems Theory **3**, 67-75 (1969).

Wilson, A. H.:
[1] Perturbation theory in quantum mechanics. I. Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **122**, 589-598 (1929).
Wolf, F.:
[1] Analytic perturbation of operators in Banach spaces. Math. Ann. **124**, 317-333 (1952).

訳者あとがき

加藤敏夫教授の『線形作用素の摂動論』(*Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1966) は，解析学あるいは数理物理学の立場から摂動論を研究しようとする者が，必ず座右に備えて参読すべき大著であり，既に斯学の古典としての高い評価が確立して久しい．本書は当初，シュプリンガー社の Grundlehren der mathematischen Wissenschaften シリーズ中の一冊として刊行されたが，後に 1995 年，同社の名著を並装版で復刻するシリーズ Classics in Mathematics にも選定・収録され，いまもこの新しい装いの下に多くの読者をかちえている．

この著書のはじめの二章は，設定を有限次元に限り，そこで働く線形作用素とその摂動を論じようとする試みである．摂動論への導入としてのみならず，独特の味わいをもった線形代数への入門としても，読者を裨益するところが大きい．このような需要に応じて，このふたつの章に，さらに正作用素の固有値問題をはじめとする若干の増補が加えられ，コンパクトな独立した著作が誕生した．それが *Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators*, (Springer-Verlag, New York, 1982) であり，読者がいま手にとって下さっている本書は，この *Short Introduction* の全訳である．私はこの主題に関心を寄せる，より多くの日本の読者に加藤教授のお仕事の一端をご紹介したいものと念願し，教授のお許しを得て，本書を世に送ることとした．

*

加藤教授は大正 6 年 (1917)，栃木県鹿沼のお生まれである．昭和 16 年

(1941)，東京帝国大学理学部をご卒業，折から大東亜戦争に突入する物情騒然たる中，とりわけシュレディンガー作用素の函数解析的性質と摂動論の数学的基礎づけをめぐる研鑽を続行された．その成果により，昭和 26 年 (1951)，理学博士（東京大学）となり，久しく理学部物理学科の教授として東京大学の講壇にお立ちになった．昭和 35 年 (1960)，朝日賞を受賞．

昭和 37 年 (1962) に渡米，以後カリフォルニア大学（バークレー）数学科の教授として研究と多くの後進の指導に力を尽くされた．私自身も，かつてバークレーの加藤教授の教室に学ぶ学生であった．

昭和 55 年 (1980)，摂動論および発展方程式に関する教授の一連のご研究に対し，ノーベルト・ウィーナー賞が授与された．この賞は五年ごとに，アメリカ数学会と応用数学会 (SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics) が共同で，応用数学に顕著な貢献を残した学者に贈る，栄誉ある賞である．

現在，カリフォルニア大学名誉教授．

教授には上記の代表作をはじめとして，解析学，数理物理学上のおびただしい著述があるが，そのうち日本語で発表され，我国の読者に長い間親しまれてきた作品として次のようなものがある．

『変分法とその応用』岩波講座・現代応用数学 B.3.（岩波書店）1957.
　寺沢寛一編『自然科学者のための数学概論』応用編（岩波書店）1960 に再録.

『位相解析学』（共立出版）1957. 当初は『函数空間論』の書名の下に
　刊行されたが，1967 年に改題.

『大学演習・応用数学 I』共著（裳華房）1961.

*

さて，原著は本文わずか 150 ページ足らずの小冊であるが，加藤教授の充実した筆のはこびを，なるべく読みやすい適切な日本語に移しかえる作業には，思いのほか多くの時日を費すこととなった．翻訳の仕事は書斎の燈下ばかりでなく，時には学会出張中の京都の宿で，また早慶両校の野球部を引率して遠征転戦したブラジル各地のホテルで，あるいは初冬の穂高を仰ぎ見る

上高地でも続けられた．鞄中の訳稿は，私とともに随分と長途を旅したことになる．

そしていま，ひざしのぬくもりがわずかに春の訪れを感じさせる軽井沢で，私は漸く校正の赤ペンを置き，この「あとがき」を書くことができたのである．

加藤教授はご多忙の中，丁寧に訳稿を閲読され，そのおかげで，私は多くの誤りを未然に防ぐことができた．

また終始，本書の完成のためにご尽力下さった，シュプリンガー・フェアラーク東京の編集部の方々にも厚く感謝の意を表したい．

平成 11 年 4 月 7 日

軽井沢にて

丸 山　徹

記号索引

文献著者索引

事項索引

◆欧文

◆和文

著　者
加藤　敏夫 (Tosio Kato)
大正6年，栃木県に生まれる．
昭和16年，東京帝国大学理学部卒業．
現在：カリフォルニア大学名誉教授，理学博士．
専門：解析学，数理物理学．

訳　者
丸山　徹 (Toru Maruyama)
昭和24年，東京に生まれる．
昭和47年，慶應義塾大学経済学部卒業．
現在：慶應義塾大学経済学部教授，経済学博士．
専門：解析学，数理経済学．

行列の摂動　　**定価（本体価格3,800円+税）**

発　行　1999年6月14日
著　者　加藤　敏夫
訳　者　丸山　徹
発行者　平野　皓正
発行所　シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社
〒113-0033　東京都文京区本郷3丁目3番13号
TEL（03）3812-0757（営業直通）
印刷所　平河工業社

This Japanese translation is based on the English original,
Tosio Kato: *A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators*
published by Springer-Verlag New York Inc.
ISBN 0-387-90666-5

ISBN 4-431-70756-5 C3041